ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**Н.С. Кравченко, С.И. Твердохлебов**

# ФИЗИКА

## МЕХАНИКА. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА. ТЕРМОДИНАМИКА

*Рекомендовано в качестве учебного пособия*
*Редакционно-издательским советом*
*Томского политехнического университета*

Издательство
Томского политехнического университета
2010

УДК 53(075.8)
ББК 22.3 Я 73
К 772

**Кравченко Н.С.**

К 772 Физика. Механика. Молекулярная физика. Термодинамика./ Н.С. Кравченко, С.И. Твердохлебов; Национальный исследовательский Томский политехнический университет – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2010 г. – 285 с.

В учебном пособии рассмотрено содержание фундаментальных законов механики, молекулярной физики и термодинамики на основе понятия состояние механической и термодинамической системы с привлечением понятий о свойствах симметрии пространства и времени в инерциальных системах отсчета. Даны разъяснения основных законов, явлений, понятий классической, релятивистской механики.

Пособие подготовлено на кафедре теоретической и экспериментальной физики ТПУ и соответствует программе курса высших учебных заведений.

Пособие предназначено для иностранных студентов технических специальностей, изучающих физику на русском языке.

**УДК 53(075.8)**
**ББК 22.3 Я 73**

*Рецензенты*
Доктор физико-математических наук, профессор ТГПУ
*Ю.П. Кунашенко*

Кандидат педагогических наук, доцент ТГУ
*О.Г. Ревинская*

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Мир представляет собой совокупность материальных объектов, находящихся в постоянном взаимодействии и непрерывном движении. Под материальными объектами или просто материей следует понимать не только вещество, но и вообще все, что находится вне нашего сознания. Например, силовые поля – поле тяготения, электромагнитное поле, поле ядерных сил – это различные формы существования материи.

Неотъемлемым всеобщим свойством материи является движение, понимаемое как всякий происходящий в природе процесс: физический, химический, биологический, общественный. Движение является формой существования материи. Без движения материя существовать не может и наоборот – движения без материи тоже не существует. Движение материи может происходить только в пространстве и во времени. Другими словами, пространство и время являются так же, как и движение, формами существования материи. Таким образом, мир есть закономерное движение материи, совершающееся в пространстве и во времени.

Физика занимается изучением физических форм движения материи, под которыми понимают механическое, тепловое, электромагнитное, внутриатомное, внутриядерное движения. Эти формы движения являются простыми и вместе с тем наиболее общими. Физика – это наука о наиболее общих закономерностях природы, свойствах и строении материи, законах ее движения. Основным методом исследования в физике является опыт. Для объяснения экспериментальных фактов разрабатываются гипотезы. Гипотеза, выдержавшая проверку на опыте, превращается в закон или теорию. Физическая теория представляет собой систему основных идей, обобщающих опытные данные и отражающих объективные закономерности природы.

По объектам описания физические теории разделяются на теории физических систем и теории пространства-времени.

Под физической системой понимается некоторая совокупность материальных объектов, взаимодействующих между собой и с окружающими материальными объектами. Любая физическая теория описывает фрагмент объективного физического мира. К теориям физических систем относятся такие теории, как механика – теория механических систем, термодинамика – теория термодинамических систем, электродинамика – теория электромагнитных систем и др.

К физическим теориям пространства-времени относятся специальная теория относительности и классическая механика.

Основным понятием теории физических систем является понятие состояние системы, под которым понимается физическая ситуация, реализованная в системе в данный момент времени. Ценность физической теории в ее предсказательной и объяснительной функции. Физическая теория своими средствами, на своем уровне и в границах применимости объясняет экспериментально наблюдаемую внутреннюю сущность физического явления. Предсказательная функция физической теории реализуется динамическими уравнениями движения и законами. Динамическое уравнение движения механической системы позволяет по известному состоянию механической системы в данный момент времени предсказать состояние механической системы в произвольный момент времени.

В первой части пособия обсуждается физическое содержание основных положений механики в контексте понятия механической системы. Подробно описаны основные теоретические модели классической механики – материальная точка, ньютоновское пространство, ньютоновское время. Рассматриваются следствия из основных законов классической механики. Обсуждается инвариантность законов механики относительно преобразований Галилея. Рассматриваются основные положения и следствия специальной теории относительности.

Вторая часть пособия посвящена теории термодинамических систем. Подробно описаны основные теоретические модели термодинамики – замкнутая термодинамическая система, процесс, обратимый и необратимый процесс и др.

Пособие предназначено для иностранных студентов, изучающих физику на русском языке. Целью пособия является изучение основных физических теорий, физических методов и законов на русском языке. Пособие содержит необходимый перечень новых слов и терминологии по каждой теме, способствующих усвоению материала.

Данное пособие подготовлено на кафедре теоретической и экспериментальной физики ТПУ и соответствует программе курса физики высших технических учебных заведений. Небольшой объем учебного пособия достигнут путем тщательного отбора и лаконичного изложения материала. Ввиду краткости курса устранены излишние разъяснения, повторения и промежуточные выкладки. Пособие является дополнением к лекциям, читаемым в аудитории.

Пособие составлено доцентами кафедры теоретической и экспериментальной физики ТПУ Кравченко Н.С., Твердохлебовым С.И.

# МЕХАНИКА

## Лекция 1
## ВВЕДЕНИЕ. КИНЕМАТИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

### Термины и понятия

Абстракция
Вакуум
Движение в механике
Движение по окружности
Декартова система координат
Динамика
Длина пути
Квантовая механика
Кинематика
Кинематическое уравнение движения
Координата
Криволинейное движение
Макроскопический
Материальная точка
Материя
Мгновенная скорость
Мгновенное ускорение
Мезон
Механика Ньютона
Механическое движение
Нейтрон
Нерелятивистская механика
Перемещение
Полная система
Предельное значение
Приращение
Протон
Прямолинейное движение
Равновесие
Равномерное движение
Равнопеременное движение
Радиус кривизны
Радиус-вектор
Релятивистская механика
Система координат
Система отсчета
Составляющая ускорения
Среднее ускорение
Средняя скорость
Статика
Тангенциальное ускорение
Тело отсчета
Теория относительности
Ускорение
Элементарные частицы

### 1.1. ВВЕДЕНИЕ

Механика – часть физики, которая изучает движение и равновесие тел. Под движением в механике понимается простейшая форма движения, то есть перемещение тела относительно других тел.

Механическое движение лежит в основе движения большинства механизмов и машин. Вместе с тем оно является составной частью более сложных, немеханических процессов. Так, тепловые явления связаны с беспорядочным движением молекул; излучение света – с движением электронов в атомах; ядерные реакции – с движением и взаимодействием элементарных частиц (протонов, нейтронов, мезонов). Число этих примеров можно было бы умножить.

Принципы механики были сформулированы английским ученым И. Ньютоном (1643 – 1727). Ньютон имел, правда, много крупных предшественников: Архимеда (287 – 212 до н.э.), Кеплера (1564 – 1642), Галилея (1564 – 1642), Гюйгенса (1629 – 1695) и др. Однако, Ньютон был первым, кто сформулировал полную систему принципов механики и на их основе построил стройное здание этой науки. Громадные достижения механики Ньютона, а также его большой научный авторитет почти на 200 лет отвлекли внимание ученых от недостатков его системы механики. Серьезное критическое отношение к механике Ньютона появилось только во второй половине XIX века.

По современным представлениям механика подразделяется на классическую и квантовую, а каждая из них – на релятивистскую и нерелятивистскую.

Механика Ньютона – это классическая нерелятивистская механика. Она изучает движение макроскопических тел, скорости которых малы по сравнению со скоростью света $c$ в вакууме. Законы движения макроскопических тел со скоростями, сравнимыми со скоростью света в вакууме, изучаются релятивистской механикой (механикой теории относительности), сформулированной А. Эйнштейном.

Движение в микромире (то есть движение атомов и элементарных частиц) является более сложной формой движения, чем механическое перемещение. Описание явлений микромира дает квантовая механика.

Квантовая и релятивистская механика – более общие теории, чем классическая и нерелятивистская. Законы нерелятивистской механики вытекают из релятивистских законов, когда скорости тел малы; законы классической механики вытекают из квантовых законов, когда массы тел большие.

Изучение механики начнем с механики Ньютона. Она значительно проще, чем квантовая релятивистская механика. В то же время механика Ньютона не есть нечто незаконченное, упрощенное; она применима в определенных условиях и в этих условиях ею необходимо пользоваться.

Механика делится на 3 раздела.

1. Кинематика изучает движение тел, не рассматривая причины, которые это движение вызывают.
2. Динамика изучает движение тел и причины, которые вызывают или изменяют это движение.
3. Статика изучает законы равновесия тел.

## 1.2. МАТЕРИАЛЬНАЯ ТОЧКА. СИСТЕМА ОТСЧЕТА

Движение тел происходит в пространстве и во времени. Классическая механика рассматривает пространство и время как объективные формы существования материи, при этом наряду с трехмерным пространством существует независимое от него время.

Для описания движения тел в механике используют разные физические модели. **Модель** – абстрактное представление тела, физического явления, которое является упрощенной копией реального тела, системы.

Простейшей моделью является <u>материальная точка.</u> **Это тело, размерами которого при данных условиях можно пренебречь (то есть можно не учитывать).**

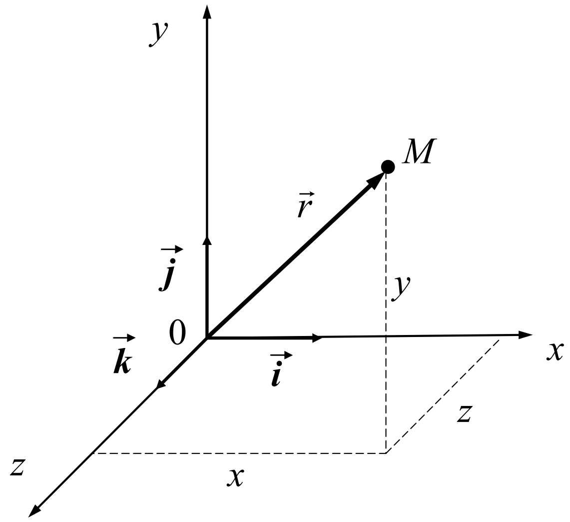
Одно и то же тело в одних условиях можно принять за материальную точку, а в других – нельзя. Например, рассматривая движение Земли вокруг Солнца, можно считать Землю материальной точкой. Но изучая вращение Земли вокруг своей оси, мы не можем считать ее материальной точкой.

Понятие материальной точки – <u>абстракция</u>. Мы абстрагируемся (отвлекаемся) от всех несущественных для данной задачи свойств тела. Это сильно упрощает исследование движения тел.

Для описания движения материальной точки надо знать, в каких местах пространства эта точка находилась и в какие моменты времени она проходила то или иное положение.

Определить положение тела можно только по отношению к другим телам. Если тело находится в пространстве, где нет других тел, то мы ничего не можем сказать о движении тела. В этом случае нет ничего, по отношению к чему тело могло бы изменить свое положение. **Тело, по отношению к которому рассматривается движение других тел, называется <u>телом отсчета.</u>** *Тело отсчета* – условно неподвижное тело, относительно которого определяется положение движущегося тела.

**Совокупность тела отсчета и часов называется <u>системой отсчета.</u>** С системой отсчета связывают систему координат. Наиболее часто используется декартова система координат.




$x$ – ось абсцисс (абсцисса),
$y$ – ордината,
$z$ – аппликата.

Положение материальной точки характеризуется тремя координатами ($x,y,z$) или радиус-вектором

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – единичные вектора (орты).

$$\left|\vec{i}\right| = \left|\vec{j}\right| = \left|\vec{k}\right| = 1.$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

При движении материальной точки ее координаты, а значит и $\vec{r}$ – вектор, изменяются со временем.

Движение материальной точки определяется скалярными уравнениями

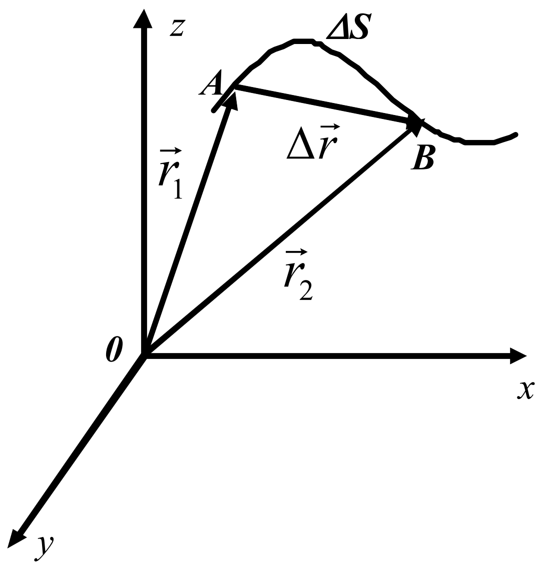
$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t), \qquad (1)$$

или векторным уравнением $\vec{r} = \vec{r}(t)$. (2)

Уравнения (1) и (2) называются **кинематическими уравнениями движения материальной точки.**

## 1.3. ПЕРЕМЕЩЕНИЕ. ДЛИНА ПУТИ

**Линия, описываемая точкой при движении в пространстве, называется траекторией точки.**




В зависимости от формы траектории движение бывает прямолинейным и криволинейным. Для того чтобы найти уравнение траектории точки, надо в уравнениях (1) и (2) исключить время.

Пусть материальная точка переместилась вдоль некоторой траектории из положения $A$ в положение $B$. $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ – радиусы-вектора точек $A$ и $B$. **Вектор** $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, **проведенный из начального положения точки в конечное положение, называет-**

ся **<u>вектором перемещения</u> или <u>перемещением</u>.** Перемещение $\Delta\vec{r}$ является приращением радиус-вектора $\vec{r}$ точки за рассматриваемый промежуток времени.

Длина отрезка траектории $AB$, пройденного материальной точкой, называется <u>длиной пути</u> $\Delta S$. Надо помнить, что перемещение $\Delta\vec{r}$ – вектор, а длина пути $\Delta S$ – скаляр.

При прямолинейном движении модуль перемещения равен пройденному пути:

$$\left|\Delta\vec{r}\right| = \Delta S .$$

При криволинейном движении

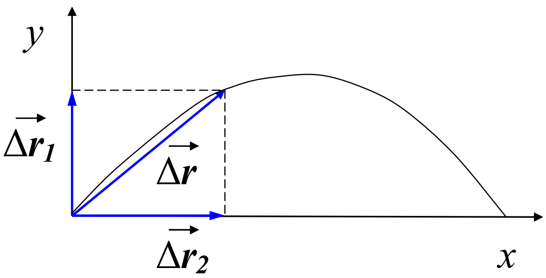
$$\left|\Delta\vec{r}\right| < \Delta S .$$

Но если перемещение происходит в течение бесконечно малого промежутка времени, т.е. когда $\Delta\vec{r}$ стремится к нулю, то в этом случае модуль бесконечно малого перемещения можно принять равным бесконечно малой длине пути для любого произвольного движения:

$$\left|d\vec{r}\right| = dS . \qquad (3)$$

Если материальная точка участвует в нескольких перемещениях, то результирующее перемещение равно векторной сумме перемещений, совершаемых материальной точкой в каждом из движений в отдельности:

$$\Delta\vec{r} = \sum \Delta\vec{r}_i .$$



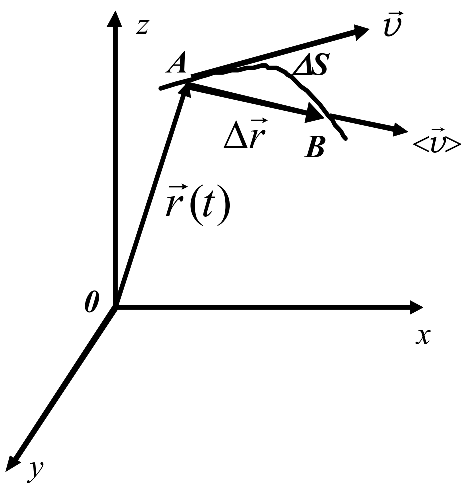

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}_1 + \Delta\vec{r}_2$$

## 1.4. СКОРОСТЬ

Для характеристики быстроты и направления движения вводится векторная величина – скорость.

Пусть материальная точка в момент времени $t$ находилась в положении $A$, её положение определяется радиус-вектором $\vec{r}\,(t)$.

При движении в течение малого промежутка времени $\Delta t$ точка пройдет по траектории путь $\Delta S$ и получит элементарное перемещение $\Delta\vec{r}$ .




1. **<u>Средней скоростью перемещения</u>** $\langle\vec{\upsilon}\rangle$ называется отношение приращения $\Delta\vec{r}$ радиус-вектора точки к промежутку времени $\Delta t$:

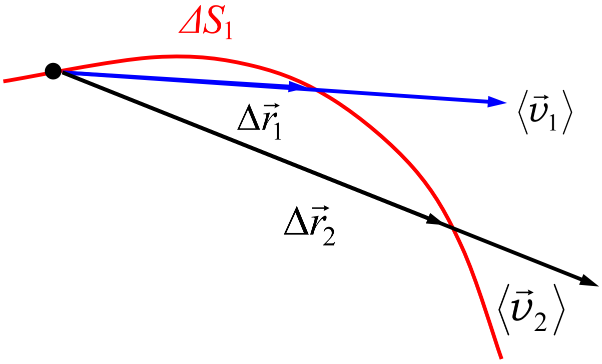
$$\langle\vec{\upsilon}\rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

Направление вектора средней скорости совпадает с направлением $\Delta\vec{r}$.

**Вектор средней скорости – отношение перемещения к промежутку времени:**

$$\langle\vec{\upsilon}_1\rangle = \frac{\Delta\vec{r}_1}{\Delta t_1};\quad \langle\vec{\upsilon}_2\rangle = \frac{\Delta\vec{r}_2}{\Delta t_2};\quad \langle\vec{\upsilon}\rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t};\quad \langle\upsilon\rangle \uparrow\uparrow \Delta\vec{r}.$$

Вектор средней скорости характеризует изменение положения радиус-вектора.




Материальная точка движется по криволинейной траектории.

За время $\Delta t_1$ точка проходит путь $\Delta S_1$ и получает приращение $\Delta\vec{r}_1$,

За время $\Delta t_2$ – приращение $\Delta\vec{r}_1$.

2. **Мгновенная скорость – это скорость точки в данный момент времени в данной точке траектории.** Для определения мгновенной скорости необходимо найти перемещение точки за бесконечно малый промежуток времени $\Delta t \to 0$. При $\Delta t \to 0$ средняя скорость стремится к предельному значению, которое называется мгновенной скоростью $\vec{\upsilon}$:

$$\vec{\upsilon} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \tag{4}$$

Таким образом, <u>мгновенная скорость</u> $\vec{\upsilon}$ есть векторная величина, равная первой производной радиуса-вектора движущейся точки по времени. **Вектор скорости $\vec{\upsilon}$ направлен по касательной к траектории в сторону движения.**

В математике *производной функции* $y = f(x)$ в точке $x_0$ называется предел отношения изменения функции $\Delta y$ в этой точке к вызвавшему его изменению аргумента $\Delta x$ при произвольном стремлении $\Delta x$ к нулю

$$\frac{dy}{dx} = y'(x) = \dot{y}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Физический смысл производной:
это среднее значение изменения функции на таком интервале, на котором среднее значение функции не меняется.

Мгновенная скорость – это вектор, поэтому

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}.$$

$\frac{dx}{dt} = \upsilon_x$; $\frac{dy}{dt} = \upsilon_y$; $\frac{dz}{dt} = \upsilon_z$ – проекции вектора скорости на оси координат.

$$|\upsilon| = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}.$$

Так как модуль бесконечно малого перемещения $|d\vec{r}|$ можно принять равным бесконечно малой длине пути (3), то модуль мгновенной скорости:

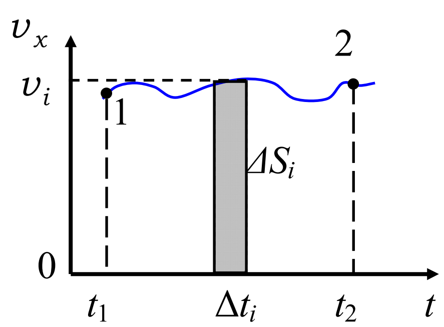
$$\upsilon = |\vec{\upsilon}| = \frac{dS}{dt}.$$

Таким образом, модуль мгновенной скорости равен первой производной пути по времени.

3. **Средняя скорость пути (средняя путевая скорость).** Средняя путевая скорость – это физическая величина, равная отношению пути к промежутку времени, за который этот путь пройден: $\langle \upsilon \rangle = \frac{\Delta S}{\Delta t}$. Средняя путевая скорость – величина скалярная, определяющая какое расстояние проходит точка в единицу времени по траектории.

## ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОЙДЕННОГО ПУТИ. ПОНЯТИЕ ОБ ИНТЕГРАЛЕ

Если известен график зависимости проекции скорости от времени, то можно найти путь, пройденный точкой за время движения. Выделим на графике бесконечно малый интервал времени $\Delta t_i$, такой, чтобы проекцию скорости $\upsilon_i$ на этом интервале можно было считать постоянной.




$\Delta t_i \to 0$.

$\upsilon_i$ – мгновенная скорость.

Тогда путь, пройденный точкой за время $\Delta t_i$, равен:

$\Delta S_i = \upsilon_i \Delta t_i$,

*Путь, пройденный точкой за время движения* $t_2 - t_1$ *равен сумме* $\Delta S_i$

$S \cong \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} \upsilon_i \cdot \Delta t_i$ *или*

*путь равен интегралу от скорости по времени*

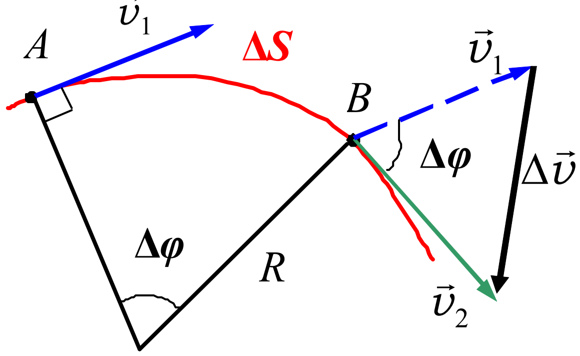
$$S = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=1}^{n} \upsilon(t)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \upsilon(t)\, dt.$$

*Физический смысл интеграла* – бесконечно большая сумма бесконечно малых слагаемых.

*Геометрический смысл интеграла* – площадь под кривой, ограниченная двумя перпендикулярами и осью абсцисс.

## 1.5. УСКОРЕНИЕ

В случае неравномерного движения для описания изменения скорости с течением времени вводят физическую величину – ускорение.




**Ускорение характеризует быстроту изменения скорости по величине и направлению.**

Рассмотрим общий случай, когда скорость меняется по величине и направлению.

Пусть материальная точка в положении $A$ имела скорость $\vec{v}_1$. Через промежуток времени $\Delta t$ точка перешла в положение *B*, где ее скорость оказалась равной $\vec{v}_2$,

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \Delta\vec{v} \quad \text{или} \quad \Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1.$$

**1. <u>Средним ускорением</u> в интервале от $t$ до $t + \Delta t$ называется векторная величина, равная отношению вектора изменения скорости $\Delta\vec{v}$ к интервалу времени $\Delta t$:**

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}.$$

**2. <u>Мгновенным ускорением</u> называется величина**

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \qquad (5)$$

Таким образом, ускорение $\vec{a}$ есть векторная величина, равная первой производной скорости по времени.

**Ускорение** материальной точки – это первая производная от вектора скорости по времени или вторая производная от радиус-вектора по времени.

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},$$

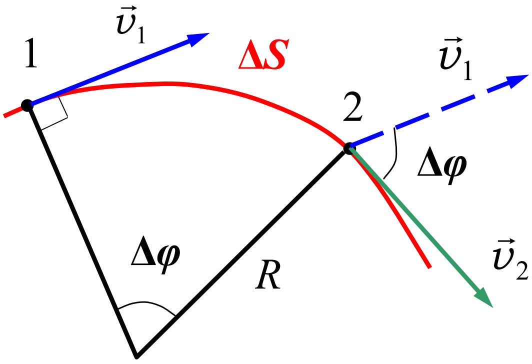
где $a_x, a_y, a_z$ – проекции вектора ускорения на координатные оси.

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}; \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}; \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

## 1.6. ПОНЯТИЕ О КРИВИЗНЕ ТРАЕКТОРИИ

Если материальная точка движется по криволинейной траектории, то отличие этой траектории от прямолинейной траектории характеризуется радиусом кривизны или кривизной траектории.




$\Delta\varphi$ – угол между касательными в точках, отстоящих друг от друга на расстоянии $\Delta S$.

**Кривизна** траектории

$$C = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta S} = \frac{d\varphi}{dS}.$$

**Кривизна траектории характеризует скорость поворота касательной при движении или степень искривленности кривой.** Радиус кривизны траектории в данной точке есть величина обратная кривизне

$$R = \frac{1}{C}.$$

Радиус кривизны траектории в данной точке – это радиус окружности, которая сливается на бесконечно малом участке в данном месте с кривой.

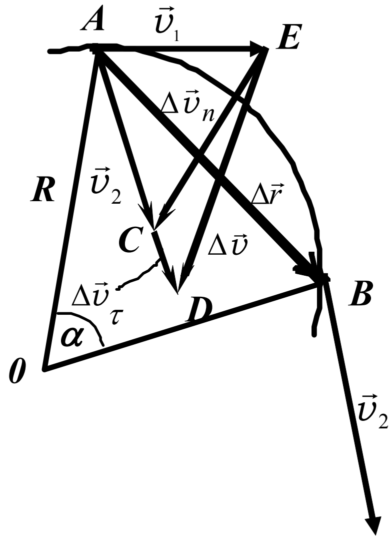
## 1.7. НОРМАЛЬНОЕ И ТАНГЕНЦИАЛЬНОЕ УСКОРЕНИЕ ПРИ КРИВОЛИНЕЙНОМ ДВИЖЕНИИ

Пусть материальная точка движется по криволинейной траектории. Рассмотрим общий случай, когда скорость движения меняется по величине и направлению.

Пусть материальная точка в положении $A$ имела скорость $\vec{\upsilon}_1$. Через промежуток времени $\Delta t$ точка перешла в положение $B$, где ее скорость оказалась равной $\vec{\upsilon}_2$.

Перенесем вектор $\vec{\upsilon}_2$ параллельно самому себе в точку $A$ (вектор $\overrightarrow{AD}$) и найдем $\Delta\vec{\upsilon}$ равный $\Delta\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1$.

Так как в общем случае скорость может меняться по величине и направлению, то удобно разложить ускорение на две составляющие. Для этого разложим на две составляющие вектор $\Delta\vec{\upsilon}$.




Из точки $A$ по направлению скорости $\vec{\upsilon}_2$ отложим вектор $\overrightarrow{AC}$, по модулю равный вектору $\vec{\upsilon}_1$. Очевидно, что вектор $\overrightarrow{CD}$, равный $\Delta\vec{\upsilon}_\tau$, характеризует изменение скорости по величине. Вектор $\Delta\vec{\upsilon}_n$ характеризует изменение скорости по направлению

$$\Delta\vec{\upsilon} = \Delta\vec{\upsilon}_\tau + \Delta\vec{\upsilon}_n .$$

Полное ускорение

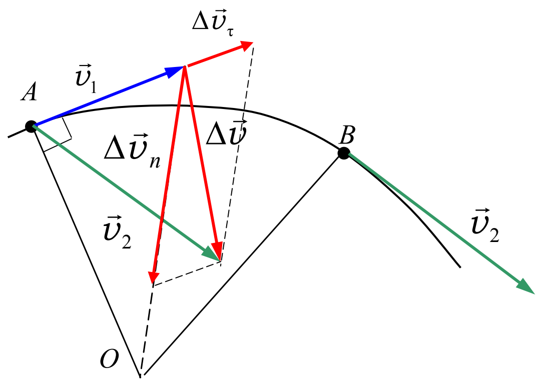
$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}_\tau}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}_n}{\Delta t} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n ,$$

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n . \tag{6}$$

Составляющая ускорение $\vec{a}_\tau$ называется **<u>тангенциальным ускорением</u>. Оно характеризует быстроту изменения скорости по величине.** Его численное значение равно первой производной по времени от модуля скорости:

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} . \tag{7}$$

Определим направление вектора $\vec{a}_\tau$. При $\Delta t \to 0$ направление вектора $\Delta\vec{\upsilon}_\tau$ стремится к направлению вектора $\vec{\upsilon}$ в точке *A* траектории. Значит, вектор $\vec{a}_\tau$ направлен по касательной к траектории.




$$\Delta\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1$$
$$\Delta\vec{\upsilon} = \Delta\vec{\upsilon}_\tau + \Delta\vec{\upsilon}_n$$
$$\vec{a}_\tau \uparrow\uparrow \Delta\vec{\upsilon}_\tau ,$$
$$\vec{a}_n \uparrow\uparrow \Delta\vec{\upsilon}_n$$

Составляющая ускорения $\vec{a}_n$ называется <u>нормальным ускорением</u>. **Оно характеризует быстроту изменения скорости по направлению.** Нормальное ускорение направлено по радиусу к центру кривизны траектории.

Найдем выражение для $\vec{a}_n$. Восстановим в точках *A* и В перпендикуляры к касательным. Они пересекутся в точке *O*. При $\Delta t \to 0$ дугу *AB* можно рассматривать как дугу окружности радиуса *R*. Из подобия треугольников *CAE* и *AOB*

$$\frac{\Delta\upsilon_n}{\upsilon_1} = \frac{\Delta r}{R} .$$

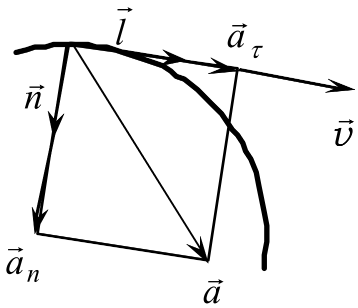
$$a_n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\upsilon_n}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\upsilon_1 \cdot \Delta r}{\Delta t \cdot R} = \frac{\upsilon_1^2}{R} .$$

Итак, нормальное ускорение

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} , \tag{8}$$

где *R* – радиус кривизны траектории. <u>Радиус кривизны</u> представляет собой радиус окружности, которая сливается в данном месте с кривой на бесконечно малом ее участке. Если траектория – окружность, то $R$ – радиус этой окружности.

Определим направление вектора $\vec{a}_n$. При $\Delta t \to 0$, угол $\alpha \to 0$ и $\Delta\vec{\upsilon}_n$ в пределе перпендикулярен $\vec{\upsilon}_1$, следовательно, $\vec{a}_n \perp \vec{\upsilon}_1$. Полное ускорение равно по модулю:




$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{d\upsilon}{dt}\right)^2 + \left(\frac{\upsilon^2}{R}\right)^2}.$$

Пусть $\vec{l}$ и $\vec{n}$ – векторы единичной длины, один направлен вдоль скорости, а другой – перпендикулярно ему, при этом

$$\left|\vec{l}\right| = \left|\vec{n}\right| = 1.$$

Тогда в векторном виде

$$\vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt}\cdot\vec{l}\,; \quad \vec{a}_n = \frac{\upsilon^2}{R}\cdot\vec{n}\,; \quad \vec{a} = \frac{d\upsilon}{dt}\cdot\vec{l} + \frac{\upsilon^2}{R}\cdot\vec{n}\,.$$

## 1.8. НЕКОТОРЫЕ ВИДЫ ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

В зависимости от тангенциального и нормального ускорений движения можно квалифицировать следующим образом.

1. $a_\tau = 0,\ \ a_n = 0$ – прямолинейное равномерное движение.
2. $a_n = 0,\ \ a = a_\tau = const$ – прямолинейное равнопеременное движение.
3. $a_\tau = 0,\ \ a = a_n = const$ – равномерное движение по окружности.
4. $a_\tau = const,\ \ a_n \neq 0$ – криволинейное равнопеременное движение.

## ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА МЕХАНИКИ

**1. Прямая задача. Определение параметров движения (скорости, ускорения, пути) п**о известному уравнению движения:

Уравнение движения – зависимость положения тела от времени в выбранной системе отсчета.

Дано:

$\vec{r} = \vec{r}(t)$ – *уравнение в векторной форме*;

$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$ – *уравнения движения в скалярной форме*

Найти: зависимость скорости и ускорения от времени.

**2. Обратная задача. Определение кинематического уравнения движения по известным характеристикам движения.**

**Дано:**

Зависимость скорости и ускорения от времени

$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}(t)$ – *уравнение в векторной форме*;

$a = a(t)$, $\upsilon = \upsilon(t)$ – *уравнения движения в скалярной форме*

Найти: уравнение движения.

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называется материальной точкой?
2. Что такое система отсчета?
3. Что такое радиус – вектор точки?
4. Что называется вектором перемещения?
5. Всегда ли модуль вектора перемещения равен пути, пройденному точкой?
6. Дайте определения векторов средней и мгновенной скорости, среднего и мгновенного ускорения. Как они направлены?
7. Что характеризует тангенциальное ускорение? Чему равен его модуль?
8. Что характеризует нормальное ускорение? Чему равен его модуль?
9. Возможны ли движения, при которых отсутствует нормальное ускорение? Тангенциальное ускорение? Приведите примеры.

# Лекция 2

## КИНЕМАТИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

### Термины и понятия

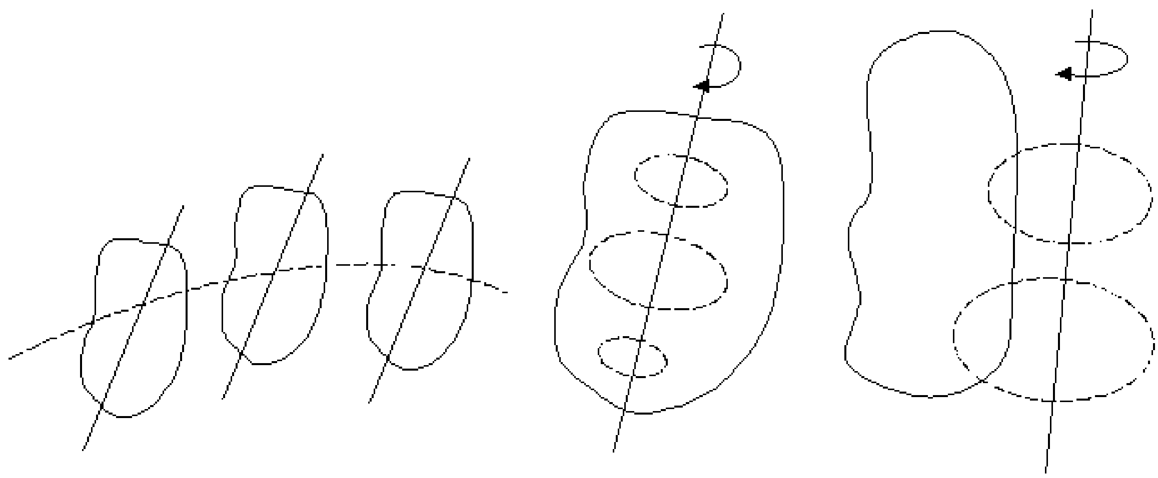
Абсолютно твердое тело
Аксиальный вектор
Вращательное движение
Деформация
Замедленное вращение
Кинематические характеристики
Конечный угол поворота
Линейные характеристики
Мгновенное положение
Недеформированное тело
Нормальное ускорение
Ось вращения
Период обращения
Поступательное движение
Правило правого винта
Псевдовектор
Угловая скорость
Угловое ускорение
Угловые характеристики
Угол поворота тела
Ускоренное вращение
Частота вращения

## 2.1. АБСОЛЮТНО ТВЕРДОЕ ТЕЛО

Абсолютно твердое тело – вторая абстракция, с которой имеют дело в механике. В природе нет совершенно недеформируемых тел. Однако во многих случаях деформациями можно пренебречь.

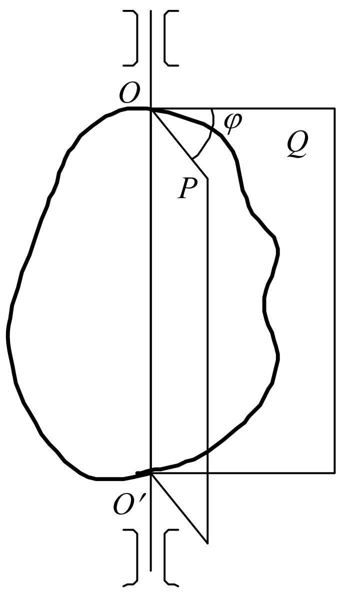
**<u>Абсолютно твердым телом</u> называется тело, деформациями которого можно пренебречь в условиях данной задачи.**

**Поступательное движение** **Вращательное движение**



Простейшими типами движения абсолютно твердого тела являются поступательное движение и вращательное движение вокруг неподвижной оси. Любое сложное движение твердого тела можно представить как совокупность поступательного и вращательного движений.

Поступательное движение – это такое движение, при котором любая прямая, проведенная в теле, остается параллельной самой себе. При




поступательном движении все точки тела движутся одинаково, имеют одинаковые скорости и ускорения. Поэтому изучение движения твердого тела можно свести к изучению движения отдельных точек тела, т.е. к задаче кинематики точки.

Вращательным движением абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси называется такое движение, при котором все точки тела описывают окружности, лежащие в параллельных плоскостях, причем центры окружностей лежат на оси вращения.

Будем рассматривать вращение тела вокруг неподвижной оси $OO'$. Проведем через ось $OO'$ две плоскости. $Q$ – неподвижная плоскость, она будет служить системой отсчета.
$P$ – подвижная плоскость, которая вращается вместе с телом.

Угол φ однозначно определяет мгновенное положение подвижной плоскости, а значит, и тела. Итак, угол $\varphi$ есть функция времени.

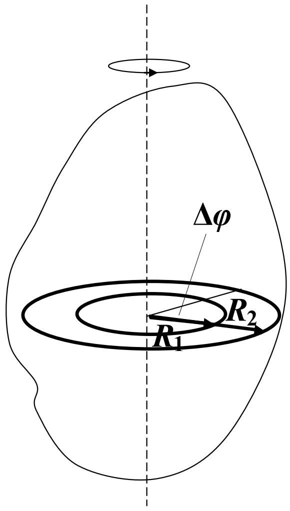
$$\varphi = \varphi\ (t). \tag{9}$$

Уравнение (9) называется кинематическим уравнением вращательного движения. Вид функции зависит от характера движения.

## КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

### 1. Вектор углового перемещения

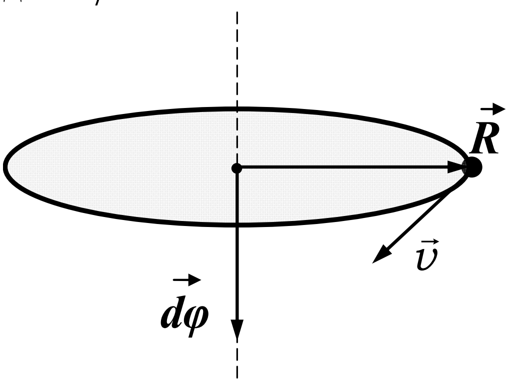
**Вращательное движение абсолютно твердого тела** относительно неподвижной оси – движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на прямой линии, называемой осью вращения.
При вращательном движении точки тела, находящиеся на разном расстоянии от оси вращения за одинаковые промежутки времени имеют разные перемещения и имеют разные скорости и ускорения.




В то же время радиус-вектор, соединяющий точки тела с осью вращения, за одинаковые промежутки времени поворачиваются на один и тот же угол $\Delta\varphi$.

Введем понятие вектора углового перемещения. **Вектор углового перемещения** $\Delta\vec{\varphi}$ **- это вектор, определяющий, как вращается твердое тело**. Направление вектора $\Delta\vec{\varphi}$ определяется **правилом правого винта:** если головку винта вращать в направлении вращении тела, то направление поступательного движения винта совпадает с направлением вектора $\Delta\vec{\varphi}$.

Если время вращения бесконечно мало, угловое перемещение будет $d\vec{\varphi}$.

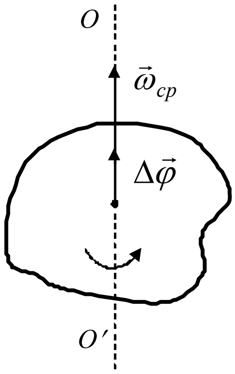



$d\vec{\varphi}$ – векторная величина (псевдовектор, аксиальный вектор).

Модуль $|d\vec{\varphi}|$ равен углу поворота.

Направление $d\vec{\varphi}$ определяется **правилом правого винта.**

2. **Угловая скорость.**




**Средняя угловая скорость.**

Пусть за время $\Delta t$ тело повернулось на угол $\Delta\varphi$.

**Средняя угловая скорость – это физическая величина равная отношению вектора углового перемещения к промежутку времени, за который это**

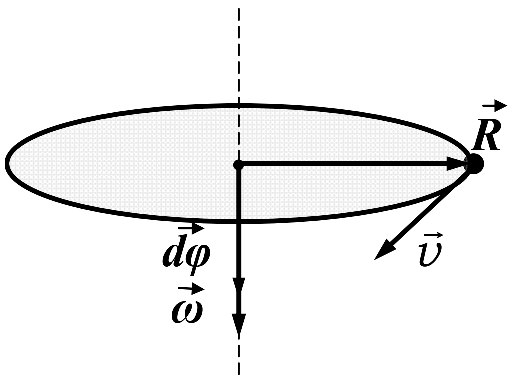
**перемещение произошло:** $\vec{\omega}_{cp} = \dfrac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t}$. Средняя угловая скорость – это вектор, направление которого совпадает с вектором $\Delta\vec{\varphi}$. Значит, вектор средней угловой скорости направлен по оси вращения и определяется правилом правого винта.

**Мгновенная угловая скорость.**

**Мгновенная угловая скорость – это угловая скорость в данный момент времени.** Мгновенная угловая скорость равна отношению элементарного углового перемещения (углового перемещения за бесконечно малое время) к промежутку времени, за который это перемещение произошло. Если время движения бесконечно мало $\Delta t \to 0$, то угловое перемещение $\Delta\vec{\varphi} \to d\vec{\varphi}$, значит, мгновенная угловая скорость – это предел, к которому стремится средняя угловая скорость при $\Delta t \to 0$.

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}, \qquad \vec{\omega} \uparrow\uparrow d\vec{\varphi}, \quad [\omega] = \frac{рад}{сек}.$$

**Векторная величина, равная первой производной от угла поворота тела по времени, называется мгновенной <u>угловой скоростью</u>.**




$d\vec{\varphi}$ – векторная величина (псевдовектор, аксиальный вектор).

Модуль $|d\vec{\varphi}|$ равен углу поворота за время $dt$.

Направление $d\vec{\varphi}$ определяется **правилом правого винта.**

$\vec{\omega} = \dfrac{d\vec{\varphi}}{dt}$; $\qquad \vec{\omega} \uparrow\uparrow d\vec{\varphi}$;

направление $\vec{\omega}$ также определяется правилом правого винта.

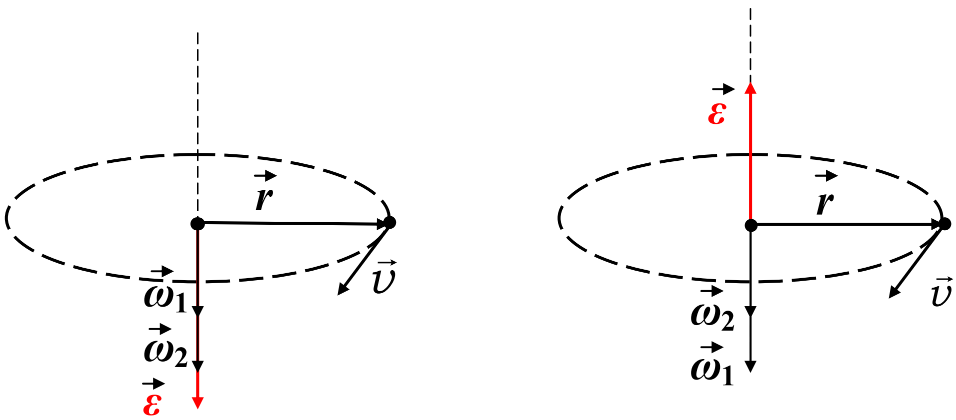
Угловая скорость $\vec{\omega}$ направлена вдоль оси, вокруг которой вращается тело, в сторону, определяемую правилом правого винта.

3. **Угловое ускорение.**

Вращение с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega} = const$ называется равномерным. Если угловая скорость $\vec{\omega} \neq const$, то тело вращается с угловым ускорением.

**Среднее угловое ускорение.**

**Среднее угловое ускорение – это физическая величина, равная отношению вектора изменения угловой скорости к промежутку времени, за который это изменение произошло:** $\vec{\varepsilon}_{cp} = \dfrac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}$. Среднее угловое ускорение – это вектор, направление которого совпадает с направлением $\Delta\vec{\omega}$.




**Мгновенное угловое ускорение.**

Мгновенное угловое ускорение – это угловое ускорение вращающегося тела в данный момент времени. **Мгновенное угловое ускорение – это физическая величина, равная отношению вектора элементарного изменения угловой скорости к промежутку времени, за который это изменение произошло.** Если время движения бесконечно мало $\Delta t \to 0$, то вектор изменения угловой скорости $\Delta\vec{\omega} \to d\vec{\omega}$, значит, мгновенное угловое ускорение – это предел, к которому стремится среднее угловое ускорение при $\Delta t \to 0$.

$$\vec{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}; \quad \vec{\varepsilon} \uparrow\uparrow d\vec{\omega}$$

Таким образом, угловым ускорением называется векторная величина, численно равная первой производной от угловой скорости по времени. Вектор углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ направлен вдоль оси вращения в ту сторону, что и $\vec{\omega}$ при ускоренном вращении и в противоположную сторону при замедленном вращении.

**4. Период и частота вращения.**

Вращение твердого тела с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega} = const$ называется равномерным. В этом случае средняя угловая скорость и мгновенная угловая скорость имеют одинаковые значения

$$\omega = \frac{\varphi}{t}, \tag{11}$$

где $\varphi$ – угол поворота за время $t$. Таким образом, при равномерном вращении $\omega$ показывает, на какой угол поворачивается тело в единицу времени.

Равномерное вращение можно характеризовать периодом вращения $T$. **Под периодом понимают время, за которое тело делает один оборот, т.е. поворачивается на угол $2\pi$.** Поэтому

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Число оборотов в единицу времени (частота вращения):

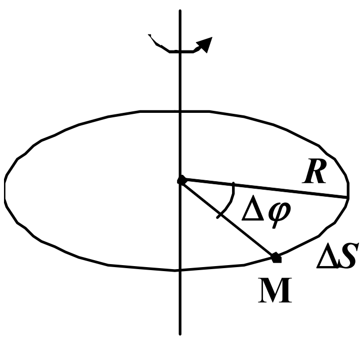
$$\nu = \frac{1}{T}.$$

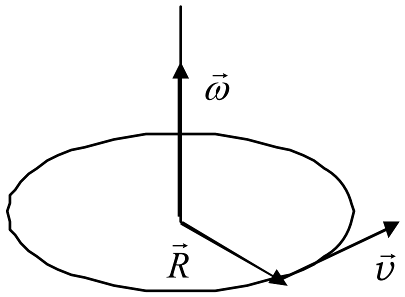
Тогда

$$\omega = 2\pi\nu.$$

## 2.2. СВЯЗЬ МЕЖДУ ЛИНЕЙНЫМИ И УГЛОВЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим произвольную точку тела $M$, которая находится на расстоянии $R$ от оси вращения и вращается с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}$. Пусть за время $\Delta t$ тело повернулось на угол $\Delta\varphi$, а точка прошла путь $\Delta S$.



Установим связь между линейными характеристиками точки ($\Delta S, v, a$) и угловыми характеристиками тела ($\Delta\varphi, \omega, \varepsilon$). Длина пути $\Delta S$ и угол поворота $\Delta\varphi$ связаны известным соотношением:

$$\Delta S = R \cdot \Delta\varphi . \qquad (13)$$

Делим обе части равенства на $\Delta t$ и переходим к пределу:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = R \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} .$$

Отсюда имеем:

$$\upsilon = \omega R . \qquad (14)$$

Формула (14) связывает модули линейной и угловой скоростей. Найдем выражение, связывающее векторы $\vec{\upsilon}$ и $\vec{\omega}$. Положение рассматриваемой точки тела будем определять с помощью вектора $\vec{R}$, который проведен в данную точку тела перпендикулярно к оси вращения.

Тогда можем записать формулу для линейной скорости как векторное произведение

$$\vec{\upsilon} = \left[ \vec{\omega}\vec{R} \right] .$$

При этом модуль векторного произведения, по определению, равен $\upsilon = \omega R \sin(\widehat{\vec{\omega}\vec{R}})$), а направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от $\vec{\omega}$ к $\vec{R}$.

Пусть тело вращается неравномерно. Тангенциальное ускорение точки:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon . \qquad (15)$$

Векторы $\vec{a}_\tau, \vec{R}, \vec{\varepsilon}$ взаимно перпендикулярны, поэтому можно записать,

что $\vec{a}_\tau = \left[ \vec{\varepsilon}\vec{R} \right]$.

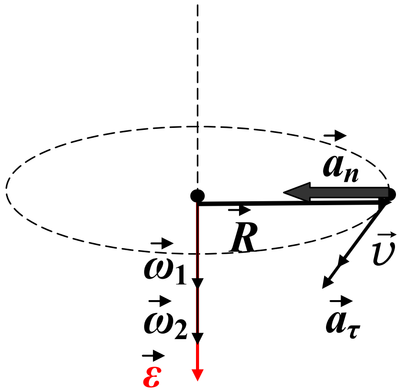
Модуль тангенциального ускорения $a_\tau = \varepsilon R \sin(\widehat{\vec{\varepsilon}\vec{R}})$.

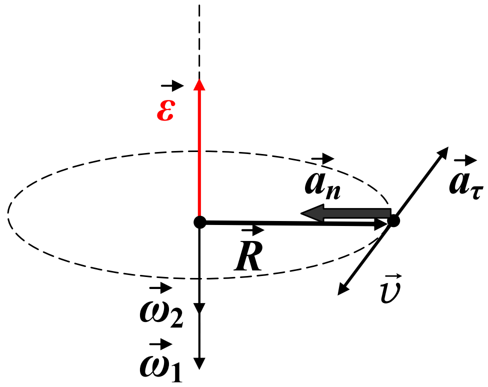
Нормальное ускорение точки:

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R . \qquad (16)$$

Вектор нормального ускорения направлен по радиусу к центру окружности – против вектора $\vec{R}$, тогда можно записать $\vec{a}_n = -\omega^2 \vec{R}$.

Формулы (15) и (16) связывают модули тангенциального и нормального ускорений точки с угловым ускорением $\varepsilon$ и угловой скоростью $\omega$ тела.




В заключение сопоставим формулы, которые связывают кинематические характеристики твердого тела $(\varphi, \omega, \varepsilon)$ с соответствующими формулами поступательного движения точки.

| Вид движения | Поступательное движение | Вращательное движение |
|---|---|---|
| Равномерное движение | $\upsilon = const$<br>$S = \upsilon t$ | $\omega = const$<br>$\varphi = \omega t$ |
| Равнопеременное движение | $a = const$<br>$\upsilon = \upsilon_0 \pm at$<br>$S = \upsilon_0 t \pm \frac{at^2}{2}$ | $\varepsilon = const$<br>$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t$<br>$\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}$ |

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какое движение называется вращательным?
2. Что называется угловой скоростью?
3. Что называется угловым ускорением?
4. Как определяются направления угловой скорости и углового ускорения?
5. Какова связь между линейными и угловыми величинами?

## Лекция 3

# ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

### Термины и понятия

Первый закон Ньютона
Второй закон Ньютона
Третий закон Ньютона
Всемирное тяготение
Гелиоцентрическая система отсчета
Гравитационные силы
Дифференциал
Закон Гука
Импульс материальной точки
Инертность
Инерциальная система отсчета
Коэффициент жесткости пружины
Коэффициент трения скольжения
Мера инертности
Обратно пропорционально
Основной закон динамики поступательного движения
Принцип относительности Галилея (механический принцип относительности)
Прямо пропорционально
Равнодействующая
Результирующая сила
Результирующее ускорение
СИ – система измерения
Сила F
Сила трения
Сила трения скольжения
Сила упругости
Силы одной природы
Скольжение
Соприкасающиеся поверхности
Точка приложения
Трущиеся поверхности
Электромагнитный

**Динамика** изучает законы движения тел и причины, которые вызывают или изменяют это движение.

Как говорилось, динамика изучает причины, которые вызывают именно такой характер движения, а не иной.

Динамика опирается на три закона Ньютона.

## 3.1. СИЛА И МАССА

Тела, окружающие материальную точку (тело), способны оказать на неё определенное влияние, действие.

**Влияние тел (или частиц) на движение друг друга называют взаимодействием.**

Взаимодействие тел является причиной их ускорений, а ускорение – следствием их взаимодействия. Так, например, с ускорением движутся падающие на Землю тела. Действие тел друг на друга является причиной изменения формы и объёма тел (причиной деформации тел).

Взаимодействие тел характеризуется некоторой величиной, являющейся функцией положений ($\vec{r}$) и скоростей ($\vec{v}$) взаимодействующих тел. **Мера механического воздействия на тело со стороны других тел, в результате, которого данное тело получает ускорение или деформируется, называется <u>силой</u> $\vec{F}$.**

Под действием силы тело

- либо изменяют вектор скорости, т.е. приобретают ускорение (динамическое проявление $\vec{F}$),
- либо изменяют свою форму и размеры, т.е. деформируются (статическое проявление $\vec{F}$).

<u>Сила</u> – это векторная величина, которая характеризуется числовым значением, направлением в пространстве и точкой приложения.

## 3.2. ПЕРВЫЙ ЗАКОН НЬЮТОНА

Если на тело не действуют силы, то механическое состояние тела не изменяется: тело не движется (не изменяются координаты тела, тело находится в состоянии покоя) или движется с постоянной скоростью (не изменяется скорость, тело движется без ускорения).

**Свободной материальной точкой** называют материальную точку, которая не взаимодействует с другими телами. Если действие сил скомпенсировано, то точка – **квазисвободная**.

Движение свободной или квазисвободной частицы называется движением по инерции.

**Закон инерции**: всякая материальная точка (тело) сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока воздействие со стороны других тел не заставит её изменить это состояние.

Характер движения зависит от выбора системы отсчета. Одно и то же движение в разных системах отсчета выглядит по-разному.

**Существуют такие системы отсчета, в которых свободная материальная точка движется равномерно и прямолинейно из любого начального положения в любом направлении.**

Такие системы отсчета называются **инерциальными системами отсчета** (ИСО). Системы отсчета, в которых нарушается закон инерции называются неинерциальными.

Если частица свободная, то она движется с постоянной скоростью или покоится относительно инерциальной системы отсчета. Кинематическое уравнение движения для свободной материальной точки можно записать $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}t$; $\vec{r}(t)-$ радиус-вектор материальной точки.

Способность тел сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного называется инертностью. Мерой инертности тела является физическая величина, называемая **массой тела.**

**Масса** (тела) – физическая величина, являющаяся одной из характеристик материи, определяющая её *инерциальные* (инертная масса).

*Свойства инертной массы*.

1. Величина инертной массы не зависит от величины и направления действия сил.
2. Масса аддитивна – масса системы тел равна сумме масс тел, входящих в систему.

Первый закон Ньютона – это закон инерции. **Инерция** – стремление тела сохранить состояние покоя или равномерного (прямолинейного) движения.

**<u>Первый закон Ньютона</u> формулируется следующим образом: всякое тело находится в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока воздействие со стороны других тел не заставит его изменить это состояние.**

Характер движения зависит от выбора системы отсчета. Одно и то же движение в разных системах отсчета выглядит по-разному.

Рассмотрим пример. Пусть системой отсчета является прямолинейно и равномерно движущийся вагон. Покоящееся относительно вагона тело – это квазисвободное тело, оно сохраняет это состояние до тех пор, пока скорость вагона постоянна. Относительно Земли это тело движется с постоянной скоростью. Можно сказать, что Земля и движущийся с постоянной скоростью относительно Земли вагон – это две инерциальные системы отсчета. Движение тела относительно этих систем отсчета подчиняется первому закону Ньютона. Но если вагон начнет заворачивать, тормозить или ускорять ход, то появятся явные нарушения закона Ньютона: покоящееся до того тело придет в движение без явного воздействия на него со стороны других тел. **Система отсчета, в которой выполняется первый закон Ньютона, называется <u>инерциальной системой отсчета</u>.** Первый закон Ньютона утверждает существование инерциальных систем отсчета.

Инерциальных систем существует бесконечное множество. **Любая система отсчета, движущаяся относительно некоторой инерциальной системы прямолинейно и равномерно, будет также инерциальной**.

Опытным путем установлено, что за инерциальную систему отсчета с большой точностью можно принять систему отсчета, центр которой совмещён с Солнцем, а оси направлены на определённые звёзды. Эта система называется **<u>гелиоцентрической системой отсчёта</u>.**

Земля, строго говоря, не является инерциальной системой отсчёта (Земля вращается вокруг своей оси и вокруг Солнца). Однако в большинстве практических случаев заметить эту неинерциальность трудно. Поэтому систему отсчёта, связанную с Землёй, можно считать инерциальной.

Первый закон Ньютона отражает то, что в инерциальных системах отсчета:
• пространство однородно и изотропно,
• время однородно.

*Однородность пространства* означает, что все точки пространства эквивалентны.

*Изотропность пространства* означает, что все направления эквивалентны (равноправны).

*Однородность времени* означает, что все моменты времени эквивалентны.

## 3.3. ВТОРОЙ ЗАКОН НЬЮТОНА

Под действием силы тело
- либо изменяют вектор скорости, т.е. приобретают ускорение (динамическое проявление $\vec{F}$),
- либо изменяют свою форму и размеры, т.е. деформируются (статическое проявление $\vec{F}$).

Итак, причина ускорения тела – действие на него со стороны других тел. **Второй закон Ньютона** устанавливает количественную связь между силой, действующей на тело, и его ускорением: **ускорение, которое приобретает тело, прямо пропорционально действующей на него силе и обратно пропорционально массе этого тела;** по направлению ускорение совпадает с силой

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}. \qquad (17)$$

Второй закон Ньютона называют основным законом динамики поступательного движения, так как его использование совместно с уравнениями кинематики позволяет решить любую задачу о механическом движении тел.

Запишем выражение (17) иначе. Учтем, что в классической механике масса тела есть величина постоянная и ее можно внести под знак дифференциала:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d\left(m\vec{\upsilon}\right)}{dt}.$$

**Векторная величина, численно равная произведению массы материальной точки на ее скорость, называется <u>импульсом</u> этой материальной точки $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$.**

Тогда второй закон Ньютона можно записать в виде:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{18}$$

– **скорость изменения импульса материальной точки равна действующей на нее силе.** Выражение (18) – более общая формулировка второго закона Ньютона.

Единица силы в СИ – <u>ньютон</u> (*Н*): 1*Н* – сила, которая массе 1 *кг* сообщает ускорение 1 $м/с^2$ в направлении действия силы:

$$1Н = 1кг \cdot м / с^2.$$

Второй закон Ньютона выполняется только в инерциальных системах отсчета. Из него можно получить первый закон. Действительно, если на тело не действует сила $\vec{F} = 0$, то $m\vec{a} = 0$; так как $m \neq 0$, то $\vec{a} = 0$, то есть скорость тела остается постоянной. Однако первый закон Ньютона рассматривается не как следствие второго закона, а как самостоятельный закон, так как именно он утверждает существование инерциальных систем отсчета.

*Другая запись второго закона Ньютона*: $\underbrace{\vec{F}dt}_{\substack{\text{импульс} \\ \text{силы}}} = d\vec{p}$, $\vec{F}dt$ – произведение силы на время её действия, называется импульсом силы. Импульс силы – это временная характеристика действия силы. $d\vec{p}$ – изменение импульса тела, изменение количества движения.

**Импульс силы** равен изменению количества движения тела под действием этой силы.

$\vec{\upsilon} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$, $\quad \vec{p} = m\vec{\upsilon} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = m\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ – уравнение движения материальной точки в общем виде относительно инерциальной системы отсчета.

## 3.4. ПРИНЦИП НЕЗАВИСИМОГО ДЕЙСТВИЯ СИЛ

Как применить второй закон Ньютона, если на тело действуют не одна, а несколько сил?

Опытным путем установлено: сила, действующая на тело, сообщает ему ускорение, которое определяется вторым законом Ньютона не зависимо от того, действуют ли на это тело другие силы или нет. Пусть на тело массой *m* действуют силы

$$\vec{F}_1, \vec{F}_2, ......\vec{F}_n.$$

Они сообщают ускорения

$$\vec{a}_1 = \frac{\vec{F}_1}{m}, \quad \vec{a}_2 = \frac{\vec{F}_2}{m}, .....\vec{a}_n = \frac{\vec{F}_n}{m}.$$

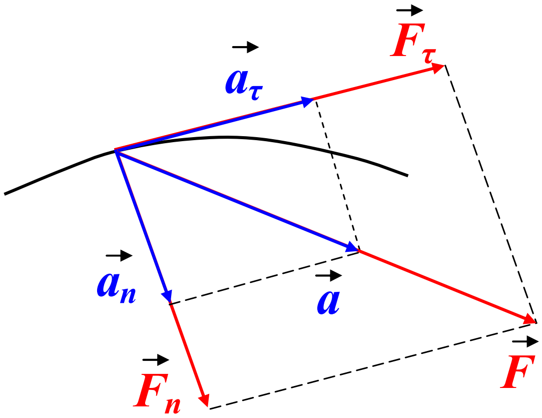
Результирующее ускорение, полученное телом

$$\vec{a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i}{m} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

Сила $\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$ – называется равнодействующей, или результирующей силой.

**Принцип независимого действия сил**: если на материальную точку действует одновременно несколько сил, то каждая из этих сил сообщает материальной точке ускорение согласно второму закону Ньютона, как будто других сил нет.

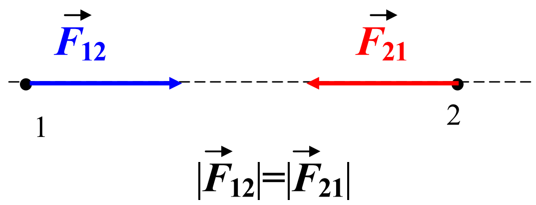
Кроме того, действие одной силы согласно принципу независимого действия можно заменить действием нескольких сил. Например:




Силы и ускорения можно разлагать на составляющие.

## 3.5. ТРЕТИЙ ЗАКОН НЬЮТОНА

Всякое действие тел друг на друга носит характер взаимодействия: если тело 1 действует на тело 2 с силой $\vec{F}_{12}$, то и тело 2 в свою очередь действует на тело 1 с силой $\vec{F}_{21}$.




**Две материальные точки взаимодействуют друг с другом силами равными по величине, противоположно направленными вдоль одной прямой.**

**Третий закон Ньютона утверждает: силы, с которыми два тела действуют друг на друга, всегда равны по модулю и противоположны по направлению:**

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

Эти силы приложены к разным телам, всегда действуют парами и являются силами одной природы.

Из закона следует:

1. Силы имеют одну и ту же физическую природу (например, гравитационную, электрическую, контактную).

2. Это силы не уравновешивают друг друга, т.к. приложены к различным телам (поэтому их нельзя складывать).

Для системы тел (материальных точек) взаимодействие всех тел можно свести к силам парного взаимодействия между материальными точками.

Следовательно, третий закон Ньютона позволяет осуществить переход от динамики отдельной материальной точки к *динамике системы материальных точек*.

## 3.6. СИЛЫ В МЕХАНИКЕ

Все силы, встречающиеся в природе и известные науке в настоящее время, в конечном счёте, сводятся к четырем типам фундаментальных взаимодействий: гравитационным, электромагнитным, ядерным и слабым. Ядерные и слабые взаимодействия характерны для процессов с участием атомных ядер и элементарных частиц и проявляются на малых расстояниях (~ $10^{-13}$ *см*). Электромагнитные и гравитационные силы убывают с увеличением расстояния между взаимодействующими телами медленно (например, сила гравитационного взаимодействия обратно пропорциональна квадрату расстояния между телами), поэтому электромагнитные и гравитационные силы называют дальнодействующими.

В механике рассматриваются различные силы: гравитационные силы, силы упругости, силы трения.

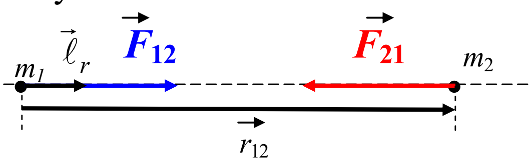
**<u>Гравитационные силы</u>** – это силы, обусловленные гравитационным взаимодействием всех без исключения тел (всемирным тяготением). Гравитационное взаимодействие передается посредством гравитационного поля. Поэтому гравитационные силы – это силы дальнодействия.

Согласно открытому Ньютоном **закону всемирного тяготения два тела (материальные точки) притягиваются с силой, пропорциональной их массам и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними.**

$F_{гр} = \gamma \dfrac{m_1 m_2}{r_{12}^2}$ , где $\gamma$ – гравитационная постоянная,

$\gamma = 6{,}672 \cdot 10^{-11}$ $м^3/(кг \cdot с^2)$.

Гравитационную силу $\vec{F}_{21}$, действующую на тело массой $m_2$ со стороны тела массой $m_1$, можно записать в векторной форме $\vec{F}_{21} = -\gamma \dfrac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \vec{\ell}_r$, где $\vec{\ell}_r$ – единичный вектор, направленный от тела 1 к телу 2.



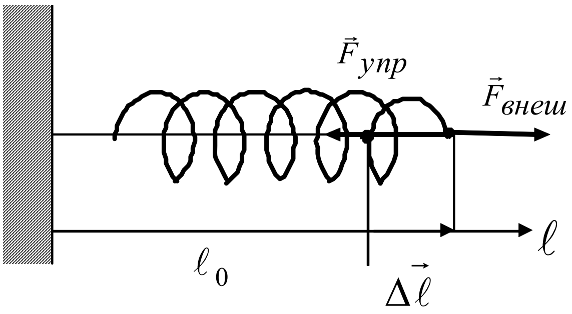

**Две материальные точки взаимодействуют друг с другом силами равными по величине, противоположно направленными вдоль одной прямой.**

$$|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}|$$

**<u>Упругие силы.</u>** Всякое реальное тело под действием приложенных к нему внешних сил деформируется, то есть изменяет свои размеры и форму. Если после прекращения действия внешних сил тело принимает первоначальные размеры и форму, деформация называется упругой. Упругие силы возникают в теле в процессе его упругой деформации.

Силы упругости и силы трения определяются характером взаимодействия между молекулами вещества. Силы взаимодействия между молекулами имеют электромагнитное происхождение. Следовательно, упругие силы и силы трения являются по своей природе электромагнитными.

Примером <u>силы упругости</u> является сила, возникающая при растяжении пружины. $\ell_0$ – длина пружины в недеформированном состоянии; $\Delta\ell$ – удлинение пружины (величина деформации); $\vec{F}_{внеш}$ – внешняя си-




ла, вызывающая деформацию; $\vec{F}_{упр}$ – сила упругости, возникающая в пружине. По закону Гука:

$$\vec{F}_{упр} = -k\Delta\vec{\ell},$$

где $k$ – коэффициент пропорциональности, называемый <u>коэффициентом жесткости пружины</u>. Знак минус указывает на то, что сила упругости направлена в сторону противоположную деформации.

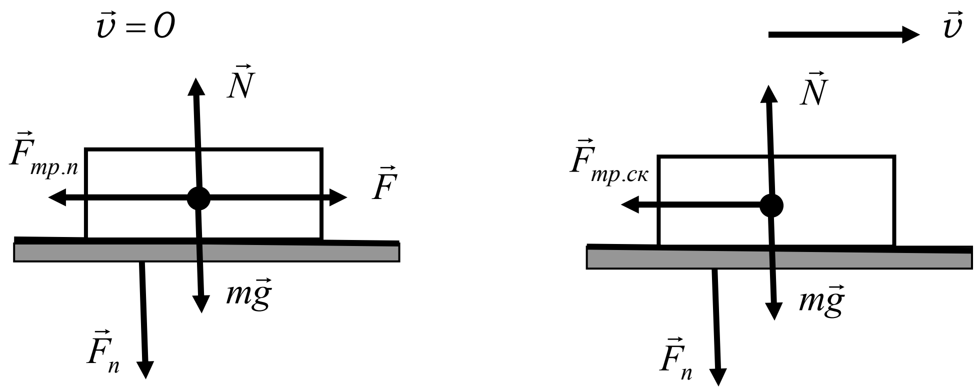
**<u>Силы трения.</u>** Силы трения возникают при перемещении соприкасающихся тел друг относительно друга или при попытке вызвать такое перемещение. Трение между поверхностями двух твердых тел называется сухим, а между твердым телом и жидкой или газообразной средой – вязким. Применительно к сухому трению различают трение покоя, скольжения и качения.

В случае сухого трения сила трения возникает не только при скольжении одной поверхности по другой, но также и при попытках вызвать такое скольжение. В этом случае она называется силой трения покоя.

Пусть тело в форме бруска прижимается к неподвижной гладкой плоской горизонтальной поверхности другого тела с силой $\vec{F}_n$, направленной по нормали к поверхности соприкосновения тел. Сила $\vec{F}_n$ называется силой нормального давления. Она может быть обусловлена притяжением бруска к Земле $\vec{F}_n = m\vec{g}$ или другими причинами. Так как брусок в вертикальном направлении не движется, то сила нормального давления уравновешивается силой нормальной реакции опоры $\vec{N}$ ($N = F_n$).

Попытаемся переместить брусок внешней горизонтальной силой $\vec{F}$, направленной параллельно поверхности соприкосновения тел. Из опыта известно, что если модуль силы $\vec{F}$ не превышает некоторого значения $F_0$, то внешняя сила уравновешивается силой трения покоя $\vec{F}_{тр.п.}$, при этом $\vec{F}_{тр.п} = -\vec{F}$. Поэтому брусок не движется. Если модуль силы $\vec{F}$ превышает значение $F_0$, то брусок начнет скользить. Таким образом, при увеличении внешней силы $F$ от нуля до $F_0$ автоматически меняется в этих же пределах сила трения покоя $F_{тр.п.}$: $0 \le F_{тр.п} \le F_0$.

Сила трения покоя препятствует попыткам переместить соприкасающиеся тела друг относительно друга.




<u>**Сила трения скольжения**</u> $\vec{F}_{тр.ск}$, возникает при перемещении (скольжении) соприкасающихся тел друг относительно друга. Приложенная к бруску сила трения скольжения направлена вдоль поверхности соприкосновения тел и противоположна скорости бруска. Явление сухого трения изучено Кулоном и Амонтоном. Из опыта известно, что модуль силы трения скольжения пропорционален силе нормального давления или, что тоже самое, силе нормальной реакции опоры $N$ ($N = F_n$). Сила трения скольжения равна

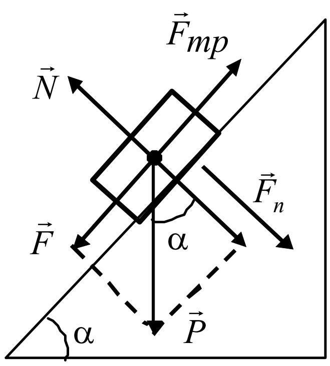
$$F_{тр.ск} = \mu F_n = \mu \cdot N,$$

где $\mu$ – <u>коэффициент трения скольжения</u>, зависящий от природы и состояния соприкасающихся поверхностей.

Сила трения скольжения возникает при относительном скольжении тела по поверхности контакта, поэтому сила трения скольжения является функцией относительной скорости. В векторной форме закон Кулона-Амонтона для силы сухого трения имеет вид: $\vec{F}_{тр.ск} = -\mu N \frac{\vec{\upsilon}}{\upsilon}$, где $\frac{\vec{\upsilon}}{\upsilon} = \vec{\ell}_{\upsilon}$ – единичный вектор в направлении движения тела относительно поверхности, по которой движется тело. Скорость $\vec{\upsilon}$ имеет смысл относительной скорости, то есть скорости тела по отношению к поверхности, по которой движется тело.

Коэффициент трения скольжения μ является функцией относительной скорости движения тел $\mu = \mu(\upsilon)$, однако, эта зависимость является слабой, и в большинстве случаев ею можно пренебречь, считая коэффициент трения скольжения постоянной величиной.

Если тело движется по горизонтальной поверхности, то сила нормального давления численно равна силе тяжести $N = mg$, тогда $F_{тр.ск} = \mu\, mg$.




Если тело движется вдоль наклонной плоскости, то

$$F_{тр.ск} = \mu \cdot P \cdot \cos\alpha = \mu \cdot mg \cdot \cos\alpha .$$

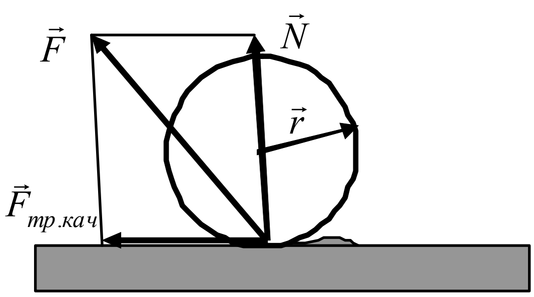
Сила трения направлена в сторону, противоположную направлению движения данного тела относительно другого.

**Сила сопротивления в вязкой среде.** Вязкая среда (газ, жидкость) оказывает сопротивление движению тела. Из обобщения результатов эксперимента следует, что при малых скоростях тела $\vec{\upsilon}_{отн}$ относительно вязкой среды сила сопротивления пропорциональна относительной скорости: $F_c = \beta \cdot \upsilon_{отн}$, где $\beta$ – коэффициент сопротивления, зависящий от формы тела, вещества и температуры среды. Например, сила сопротивления, действующая на шарик радиуса $R$ в жидкости, определяется законом $F_c = 6\pi\eta R \upsilon_{отн}$, где $\beta = 6\pi\eta R$ и $\eta$ – вязкость среды.

В векторной форме закон силы сопротивления имеет вид: $\vec{F}_c = -\beta \cdot \vec{\upsilon}_{отн}$.

При больших скоростях движения сила сопротивления начинает зависеть от скорости по закону $F_c \sim \upsilon^2_{отн}$ или $F_c \sim \upsilon^3_{отн}$. Например, такое наблюдается при полете самолетов.

**Сила трения качения.** Сила трения качения возникает при качении тел цилиндрической или шарообразной формы по гладкой поверхности вследствие деформации обоих соприкасающихся тел. На гладкой поверхности в месте ее соприкосновения с телом круглой формы появляется небольшое углубление и бугорок. Вследствие этого возникает сила сопротивления движению $\vec{F}$ (сила реакции), горизонтальная составляющая которой называется силой трения качения $\vec{F}_{тр.кач}$, а вертикальная составляющая – силой



нормальной реакции опоры $\vec{N}$. Сила трения качения определяется по закону Кулона: $F_{тр.кач} = \mu_{кач}\dfrac{N}{r}$, где $\mu_{кач}$ – коэффициент трения качения, $r$ – радиус катящегося тела.

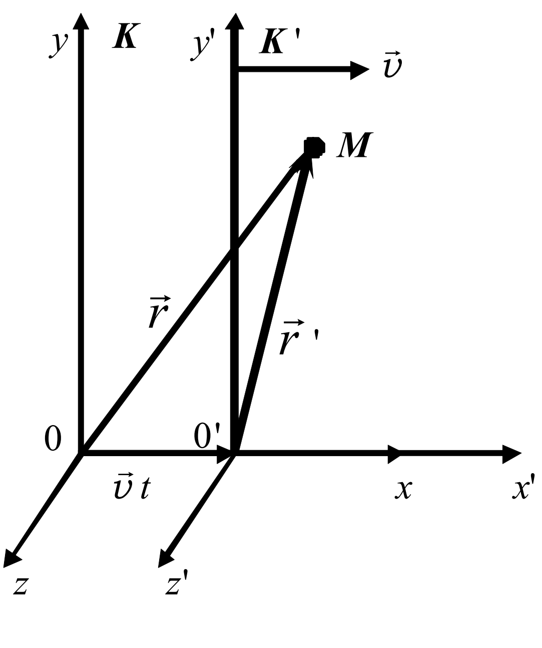
Обычно величина силы трения качения во много раз меньше силы трения скольжения. Этим обусловлено широкое использование в технике подшипников качения, позволяющих значительно уменьшить трение в деталях машин и механизмов.

## 3.7. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГАЛИЛЕЯ. МЕХАНИЧЕСКИЙ ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Рассмотрим две инерциальные системы отсчета. Пусть система $K'$ движется с постоянной скоростью $\vec{\upsilon}$ относительно другой системы $K$. Выберем оси координат систем так, чтобы оси $x$ и $x'$ совпадали и были направлены вдоль вектора $\vec{\upsilon}$. За начало отсчета времени берем момент, когда начала координат $O$ и $O'$ совпадали. Пусть $\vec{r}$ – радиус-вектор точки $M$ в системе $K$, а $\vec{r}'$ – радиус-вектор той же точки в системе $K'$. Соотношение между $\vec{r}$ и $\vec{r}'$ имеет вид: $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{\upsilon}t$. (19)

В классической механике предполагается, что ход времени не зависит от системы отсчета, т.е. $t = t'$. (20)

Соотношения (19) и (20) представляют собой так называемые преобразования Галилея. В проекции на оси координат эти преобразования имеют вид: $x = x' + \upsilon t$, $y = y'$, $z = z'$. (21)




Преобразования Галилея устанавливают связь между координатами при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Они справедливы лишь в случае классической механики, при движении тел со скоростями много меньших скорости света в вакууме $c$.

Если продифференцировать (19) по времени, то найдем правило сложения скоростей в классической механике:

$$\vec{u} = \vec{u}' + \vec{\upsilon}, \tag{22}$$

где $\vec{u}$ и $\vec{u}'$ – скорости точки $M$ в системах $K$ и $K'$.

Ранее мы говорили, что любая система отсчета, движущаяся относительно некоторой инерциальной системы равномерно и прямолинейно, будет также инерциальной. Теперь мы имеем возможности доказать это утверждение. Если продифференцировать по времени выражение (22), то найдем, что $\vec{a} = \vec{a}'$.

Отсюда следует, что ускорение какого-либо тела во всех системах отсчета, движущихся друг относительно друга равномерно и прямолинейно, оказывается одним и тем же. Поэтому, если одна из этих систем инерциальная (это значит при отсутствии сил $\vec{a} = 0$), то и другие будут инерциальными ($\vec{a}'$ также равно нулю).

В классической механике справедлив **механический принцип относительности (принцип относительности Галилея): уравнения динамики не изменяются при переходе от одной инерциальной системы к другой.** С механической точки зрения, все инерциальные системы отсчета равноправны: ни одной из них нельзя отдать предпочтение перед другими. Практически это проявляется в том, что **никакими механическими опытами, проведенными в данной инерциальной системе отсчета, нельзя установить, покоится ли она или движется равномерно и прямолинейно.** Например, находясь в вагоне поезда, который движется без толчков равномерно и прямолинейно, мы не сможем определить, движется вагон или покоится, если не посмотрим в окно.

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какая система отсчета называется инерциальной? Почему система отсчета, связанная с Землей, строго говоря, не является инерциальной?
2. Сформулируйте законы Ньютона. Что называется силой?
3. В чем заключается принцип независимости действия сил?
4. Какие силы рассматриваются в механике? Дайте их краткую характеристику.
5. Что представляют собой преобразования Галилея? В чем состоит принцип относительности Галилея?
6. Напишите и объясните правило сложения скоростей в классической механике.

## Слова и выражения

Бесконечное множество
В направлении *чего?*
В случае *чего?*
Вагон
Взаимодействие
Внести
Внешний
Воздействие
Возникать (возникнуть)
Всякий
Выбор
Выглядеть *как?*
Выполнять (ся)
Действительно
Жесткий
Заворачивать (завернуть)
Заметить *что?*
Замечательный
Принцип
Приобретать *что?*
Приходить в движение
Причина
Причинный
Продифференцировать по *чему?*
Происхождение
Противиться *чему?*
Противоположный
Пружина
Проявляться (проявиться) *в чем?*
Равноправен, -а,-о,-ы
Растяжение
Следовательно
Следствие
Случай
Совместно с *чем?*
Совмещен, -а,-о, -ы с *чем?*
Сообщать *что? кому/чему?*
Соприкасаться
Состояние
Справедлив, -а,-о,-ы
Строго говоря
Существование
Так называемый
Толчок
Тормозить
Точный
Удлинение
Указывать *что?/ на что?*
Упругий
Установлен, -а, -о, -ы
Утверждать
Учесть (учитывать)
Формулировка
Ход
Явный

## Лекция 4

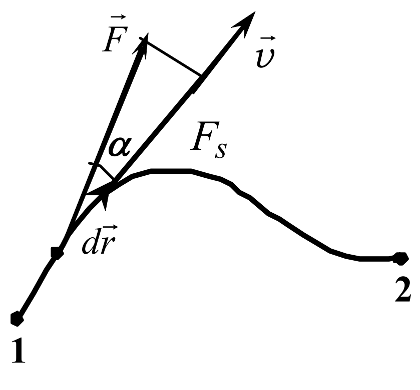
# РАБОТА И ЭНЕРГИЯ

### Термины и понятия

Ватт
Возвращающая сила
Градиент функции
Графическая зависимость
Джоуль
Диссипативные силы
Кинетическая энергия
Консервативные силы
Мощность
Неустойчивое равновесие
Отдельно взятое тело
Поле гравитационных сил
Поле упругих сил
Потенциальная кривая
Потенциальная энергия
Потенциальная яма
Потенциальный барьер
Работа силы
Силовое поле
Тепловая энергия
Упруго деформированное тело
Устойчивое равновесие
Частная производная
Электромагнитная энергия
Элементарная работа
Ядерная энергия

## 4.1. РАБОТА СИЛЫ. МОЩНОСТЬ

Пусть тело под действием силы $F$ совершает перемещение по некоторой траектории 1 – 2. В общем случае сила $\vec{F}$ в процессе движения тела может меняться как по модулю, так и по направлению.




Рассмотрим элементарное перемещение, в пределах которого силу $\vec{F}$ можно считать постоянной.

Элементарной работой силы $\vec{F}$ на перемещении $d\vec{r}$ называется скалярная величина

$$dA = \left(\vec{F} \cdot d\vec{r}\right) = F\cos\alpha \cdot dS = F_S dS, \qquad (23)$$

где $\alpha$ – угол между векторами $\vec{F}$ и $d\vec{r}$, $dS = \left|d\vec{r}\right|$ – элементарный путь, $F_S$ – проекция вектора $\vec{F}$ на вектор $d\vec{r}$, $F_S = F \cdot \cos\alpha$.

Сила $\vec{F}$, действующая на материальную точку, как правило, изменяется по мере перемещения материальной точки по траектории относительно

сительно системы отсчета. При этом сила может зависеть как от координат $x$, $y$, $z$ точки, так и от скорости движения точки. Таким образом, сила $\vec{F}$ в общем случае – функция нескольких переменных. Поэтому, как показывается в математике, элементарная работа силы $\vec{F}$ не является полным дифференциалом какой-либо функции координат точки. Чтобы это подчеркнуть, элементарная работа обозначается символом $\delta A$, а не $dA$.

В прямоугольных декартовых координатах $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$, а $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$. Поэтому согласно правилу скалярного умножения векторов, элементарная работа силы $\vec{F}$ равна: $\delta A = F_x dx + F_y dy + F_z dz$, где $F_x, F_y, F_z$ – проекции силы $\vec{F}$ на оси координат, $dx, dy, dz$ – проекции вектора перемещения $d\vec{r}$ на оси координат.

Работа $A$, совершаемая силой $\vec{F}$ на конечном перемещении материальной точки из положения 1 в положение 2, равна сумме элементарных работ силы $\vec{F}$ на всех малых участках траектории материальной точки от 1 до 2. Эта сумма сводится к интегралу.

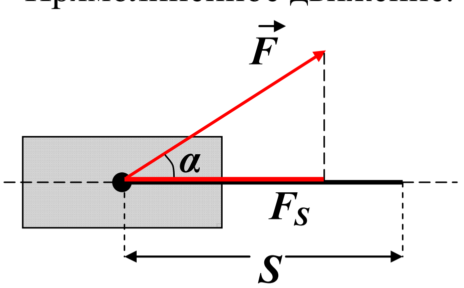
Суммируя (интегрируя) выражение (23) по всем элементарным участкам пути от точки 1 до точки 2, найдем работу силы $\vec{F}$ на данном пути:

$$A = \int_1^2 \left(\vec{F} d\vec{r}\right) = \int_1^2 F_S dS. \qquad (24)$$

Если сила имеет постоянные величину и направление, а движение прямолинейное, то проекцию вектора силы $F_S$ в выражении для работы можно вынести за знак интеграла, в результате чего получится формула:

$$A = F_S \int_1^2 dS = F_S \cdot S = F \cdot S \cdot \cos\alpha. \qquad (25)$$

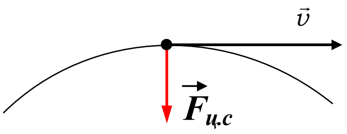
• Прямолинейное движение.

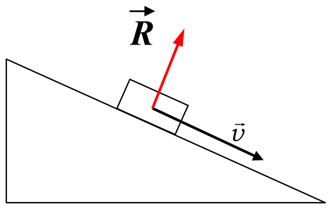



$$A = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\vec{S}\right| \cos\alpha.$$

Если сила и направление перемещения образуют острый угол ($\cos\alpha > 0$), работа положительна. Если угол $\alpha$ – тупой ($\cos\alpha < 0$), работа отрицательна.

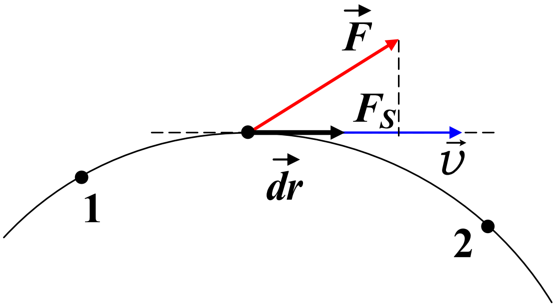
При $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ работа равна 0.




$\vec{F} \perp d\vec{r} \Rightarrow A = 0.$

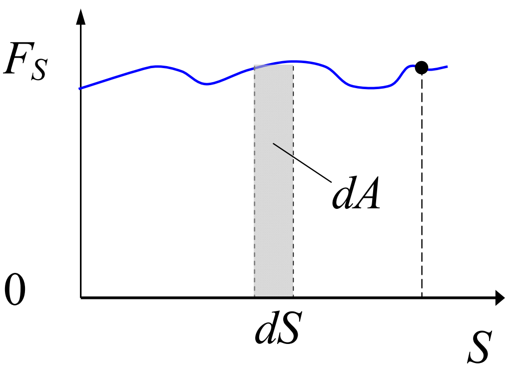
• Движение по участку траектории.




$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} d\vec{r} = \int_{1}^{2} F_S dS.$$

$F_S$ – проекция вектора $\vec{F}$ на вектор перемещения $d\vec{r}$

Единица работы в СИ – <u>джоуль</u> (*Дж*). 1 *Дж* – работа, совершаемая силой 1 *Н* на пути 1 *м* (1 $Дж = 1\ Н \cdot м$).




При графическом изображении $F_S(S)$ работа равна площади под кривой.

Для характеристики скорости, с которой совершается работа, вводят величину, называемую мощностью. **<u>Мощность</u> – это работа, совершаемая силой за единицу времени. Средняя мощность за промежуток времени $\Delta t$**

$$N_{ср} = \frac{A}{\Delta t}.$$

Если за время $dt$ сила $\vec{F}$ совершает работу $\left(\vec{F} \cdot d\vec{r}\right)$, то мощность, развиваемая этой силой в данный момент времени (мгновенная мощность) есть $N = \dfrac{\delta A}{dt} = \dfrac{(\vec{F}d\vec{r})}{dt}$. Учитывая, что $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\upsilon}$, получим:

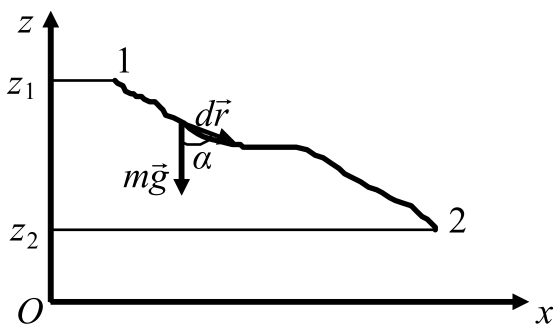
$$N = \left(\vec{F} \cdot \vec{\upsilon}\right). \qquad (26)$$

Таким образом, **мгновенная мощность, развиваемая силой $\vec{F}$, равна скалярному произведению вектора силы на вектор скорости, с которой движется точка приложения данной силы.**

Как и работа, мощность – скалярная величина. Единица мощности в СИ – ватт (*Вт*): 1 *Вт* – мощность, при которой за время 1 *с* совершается работа 1 *Дж* (1 *Вт* = 1 *Дж/с*).

Выразим работу $A$ силы на конечном пути через мгновенную мощность $N$. Так как мгновенная мощность $N = \dfrac{\delta A}{dt}$, то элементарная работа $\delta A = Ndt$, тогда $A = \int\limits_1^2 (\vec{F}d\vec{r}) = \int\limits_{t_1}^{t_2} Ndt$, где $t_1$ и $t_2$ – моменты времени, соответствующие пребыванию материальной точки в точках 1 и 2 траектории движения.

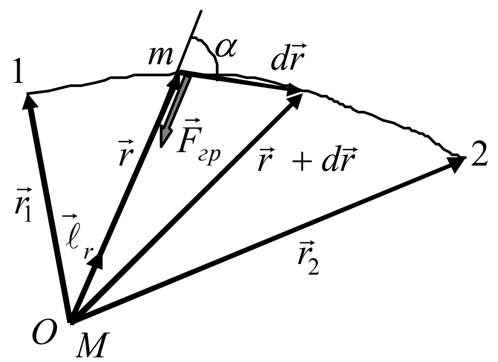
**Работа силы тяжести.** Пусть тело массой $m$ перемещается вдоль произвольной траектории из точки 1 в точку 2. При этом на тело (материальную точку) действует постоянная сила тяжести $m\vec{g}$.




Работа силы тяжести равна: $A = \int\limits_1^2 (m\vec{g} \cdot d\vec{r})$. Мысленно разделим всю траекторию на элементарные участки и вычислим элементарную работу $\delta A = (m\vec{g} \cdot d\vec{r})$ на одном из них: $\delta A = (m\vec{g} \cdot d\vec{r}) = mg|dr| \cdot \cos\alpha = -mg \cdot dz$, где $\alpha$ – угол между векторами $\vec{g}$ и $d\vec{r}$, $dz$ – приращение координаты $z$ тела, соответствующее его перемещению $d\vec{r}$, $dz = -|dr| \cdot \cos\alpha$. Как видно из полученного выражения, элементарная работа зависит только от переменной $z$. При перемещении тела из точки 1 в точку 2 траектории координата $z$ изменяется в пределах от $z_1$ до $z_2$. Тогда работа силы тяжести равна: $A=\int\limits_1^2 \delta A=\int\limits_1^2 (m\vec{g}\cdot d\vec{r})=-\int\limits_{z_1}^{z_2} mg\cdot dz=mg(z_1-z_2)$.

Из полученной формулы видно, что **работа силы тяжести не зависит от формы траектории движения тела, а определяется только ее координатой $z$ в начальном и конечном положении.**

**<u>Работа гравитационной силы.</u>** Пусть в точке $O$ пространства находится тело (материальная точка) массы $M$, которое действует на тело (материальную точку) массой $m$ с силой гравитационного взаимодействия $\vec{F}_{гр}$: $\vec{F}_{гр}=-\gamma\dfrac{Mm}{r^2}\vec{\ell}_r$,




где $\vec{\ell}_r$ – единичный вектор, направленный по вектору $\vec{r}$, $\gamma$ – гравитационная постоянная.

Если тело переместилось из точки 1 в точку 2 траектории под действием гравитационной силы взаимодействия, то работа гравитационной силы на этом пути равна: $A=\int\limits_1^2(\vec{F}_{гр}d\vec{r})=-\int\gamma\dfrac{Mm}{r^2}(\vec{\ell}_r d\vec{r})$.

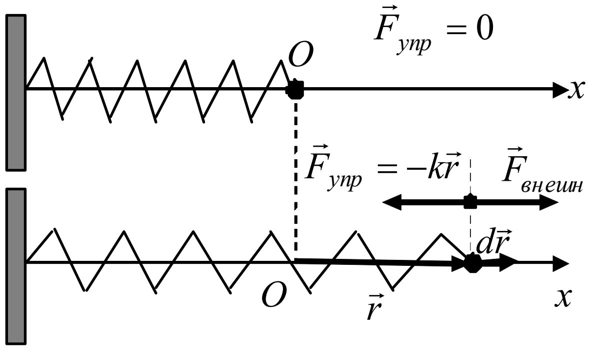
Работа $\delta A$ гравитационной силы на элементарном перемещении $d\vec{r}$ (одном из элементарных участков траектории) равна $\delta A=(\vec{F}_{гр}d\vec{r})=-\gamma\dfrac{Mm}{r^2}(\vec{\ell}_r d\vec{r})=-\gamma\dfrac{Mm}{r^2}\left|\vec{\ell}_r\right|\left|d\vec{r}\right|\cdot\cos\alpha=-\gamma\dfrac{Mm}{r^2}dr$, где величина $dr=\left|d\vec{r}\right|\cdot\cos\alpha$ равна приращению $dr$ модуля радиус-вектора $\vec{r}$.

При перемещении тела из точки 1 в точку 2 модуль его радиус-вектора изменяется от $\vec{r}_1$ до $\vec{r}_2$, поэтому работа гравитационной силы на пути между точками 1 и 2 равна:

$$A=\int\limits_1^2\delta A=\int\limits_1^2(\vec{F}_{гр}d\vec{r})=-\int\limits_{r_1}^{r_2}\gamma\frac{Mm}{r^2}dr=\gamma Mm\cdot\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right).$$

**Работа гравитационной силы не зависит от формы траектории, а определяется только начальным и конечным положением тела относительно другого тела.**

**<u>Работа упругой силы.</u>** Рассмотрим пружину, один конец которой закреплен, а другой может перемещаться горизонтально под действием внешней силы. Направим координатную ось $x$ параллельно оси пружины и выберем начало отсчета координаты $x$ ($x = 0$) в положении незакрепленного конца недеформированной пружины (точка $O$).

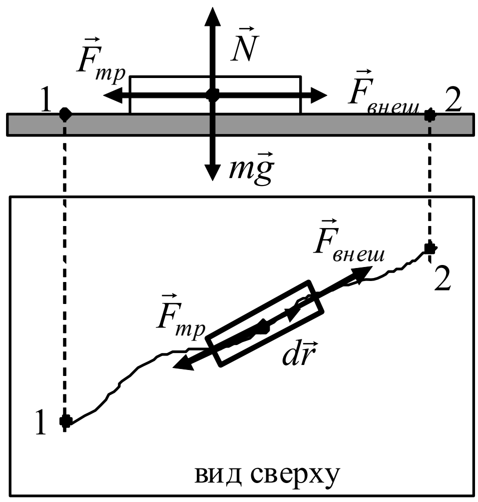



При растяжении или сжатии пружины возникает упругая сила $\vec{F}_{упр} = -k\vec{r}$, где $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный из точки $O$ к незакрепленному концу деформированной пружины. Под действием внешней силы $\vec{F}_{внеш}$, работу которой рассматривать не будем, незакрепленный конец пружины, к которому приложена также $\vec{F}_{упр}$, переместится на $d\vec{r}$. Если незакрепленный конец пружины переместился вдоль оси $x$ из точки с координатой $x_1$ в точку с координатой $x_2$, то работа $\vec{F}_{упр}$ равна: $A = \int_1^2 \delta A = \int_1^2 (\vec{F}_{упр} d\vec{r}) = \int_1^2 (-k\vec{r} d\vec{r})$ или в проекции на ось $x$

$$A = \int_1^2 (-k\vec{r} d\vec{r}) = -\int_{x_1}^{x_2} kx dx = \frac{k}{2}(x_1^2 - x_2^2).$$

Из полученного выражения видно, что **работа упругой силы на конечно пути зависит только от начальной $x_1$ и конечной $x_2$ координат точки приложения силы.**

<u>**Работа силы трения скольжения.**</u> Рассмотрим тело массой $m$, движущееся по горизонтальной поверхности под действием внешней силы $\vec{F}_{внеш}$ по произвольной криволинейной траектории из точки 1 в точку 2. При перемещении тела относительно поверхности между соприкасающимися телами возникает сила трения скольжения $F_{тр.ск} = \mu N = \mu mg$, где $\mu$ – коэффициент трения скольжения, а $N$ – модуль силы нормальной реакции опоры ($N = mg$).




Работа силы трения скольжения на одном из элементарных участков траектории равна:

$$\delta A = (\vec{F}_{тр.ск} d\vec{r}) = F_{тр.ск} \left|d\vec{r}\right| \cdot \cos 180^0 = -\mu mg \cdot dS\,,$$

где $\left|d\vec{r}\right| = dS$ – модуль вектора элементарного перемещения равен элементарному пути $dS$. В любой момент времени вектор силы трения скольжения $\vec{F}_{тр.ск}$ направлен противоположно $d\vec{r}$. Если тело перемещается из точки 1 в точку 2, то работа силы трения будет равна:

$$A = \int\limits_1^1 \delta A = \int (\vec{F}_{тр.ск} d\vec{r}) = -\int\limits_1^2 kmg \cdot ds = -kmgS\,,$$

где $S$ – пройденный телом путь по траектории.

В отличие от работы силы тяжести, гравитационной силы и упругой силы, **работа силы трения зависит от длины пройденного телом пути *S*, и, следовательно, зависит от формы траектории.**

Таким образом, среди рассмотренных сил можно выделить такие, работа которых не зависит от формы траектории и характера движения тела, а определяется только начальным и конечным положением относительно других тел. Это – сила тяжести, гравитационная сила, упругая сила.

**Силы, работа которых не зависит от формы траектории, а определяется только начальным и конечным положением относительно других тел, называются консервативными.**

## 4.2. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Следствием действия силы на материальную точку является приобретение материальной точкой ускорения: $m\vec{a} = \vec{F}$ или $m\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F}$,

где $\vec{F}$ – результирующая сила, действующая на материальную точку.

Пусть частица массы $m$ движется под действием некоторой силы $\vec{F}$. Найдем элементарную работу этой силы на перемещении $d\vec{r}$.

$$\delta A = \left(\vec{F}\, d\vec{r}\right) = \left(m\,\vec{a}\, d\vec{r}\right) = m\left(\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} d\vec{r}\right) = m\left(\vec{\upsilon}\, d\vec{\upsilon}\right),$$

так как $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$, $\vec{a} = \dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}$, $\vec{\upsilon} \cdot d\vec{\upsilon} = \upsilon \cdot d\upsilon$.

Таким образом,

$$\delta A = m\upsilon\, d\upsilon = d\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right).$$

Если материальная точка перемещается из состояния 1 в состояние 2. Состояние 1 материальной точки характеризуется скоростью $\upsilon_1$, а состояние 2 характеризующееся скоростью $\upsilon_2$. Работа результирующей силы при переходе материальной точки из состояния 1 в состояние 2 равна: $A = \int\limits_1^2 \delta A = \int\limits_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} m\upsilon d\upsilon = \dfrac{m\upsilon_2^2}{2} - \dfrac{m\upsilon_1^2}{2}$.

Выражение $E_к = \dfrac{m\upsilon^2}{2}$ называется кинетической энергией материальной точки. Кинетическая энергия является скалярной мерой движения.

Итак, работа результирующей силы равна приращению кинетической энергии материальной точки.

В интегральной форме данное утверждение записывается в виде:

$$A_{1-2} = \frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2} \text{ или } A_{1-2} = \Delta E_к .$$

В дифференциальной форме – в виде: $\delta A = d\left(\dfrac{m\upsilon^2}{2}\right)$ или $\delta A = dE_к$.

**Уравнения $A_{1-2} = \Delta E_к$ и $\delta A = dE_к$ называются теоремами об изменении кинетической энергии** (в интегральной и дифференциальной формах соответственно).

Согласно теоремы изменение кинетической энергии материальной точки обусловлено тем, что результирующая сила совершает работу. Изменение кинетической энергии означает изменение модуля скорости тела.

Таким образом, кинетическая энергия это механическая энергия, которой обладает тело массой $m$, движущееся со скоростью $\vec{\upsilon}$.

$$E_K = \frac{m\upsilon^2}{2}.$$

При конечном перемещении из точки 1 в точку 2 работа силы идет на приращение кинетической энергии:

$$A_{12} = \int_1^2 dA = \int_1^2 dE_K = E_{K2} - E_{K1},$$

$$A_{12} = E_{K2} - E_{K1}. \qquad (27)$$

Если $A_{12} > 0$, то $E_{K2} > E_{K1}$, т.е. кинетическая энергия частицы увеличивается; если же $A_{12} < 0$, то кинетическая энергия уменьшается.

## 4.3. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ

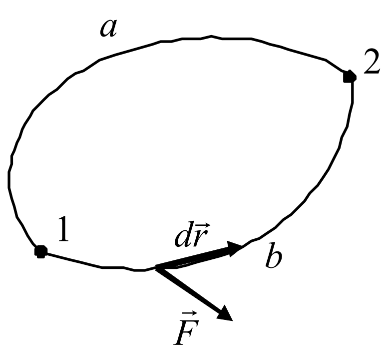
Потенциальная энергия – это механическая энергия системы тел, определяемая их взаимным расположением и характером сил взаимодействия между ними. Если на тело (материальную точку) в каждой точке пространства действует определенная сила, то всю совокупность сил называют силовым полем. Если силы не зависят от времени, силовое поле называется стационарным. Например, тело массой $m$, расположенное вблизи поверхности Земли, испытывает действие силы тяжести $m\vec{g}$. Величина и направление силы тяжести можно считать приблизительно одинаковыми во всех точках пространства вблизи поверхности Земли. Тело находится в однородном поле силы тяжести.

Пусть взаимодействие между телами осуществляется с помощью силовых полей (например, поле гравитационных сил, поле упругих сил), которые обладают следующим свойством: работа, совершаемая силами при перемещении тела из одного положения в другое, не зависит от траектории тела, а зависит только от начального и конечного положения тела. Такие силы называются консервативными. Поле консервативных сил называется консервативным.

Если работа, совершаемая силой, зависит от траектории тела, то такая сила называется неконсервативной; ее примером является сила трения.

Покажем, что при перемещении тела в консервативном поле работа консервативных сил по замкнутой траектории равна нулю.

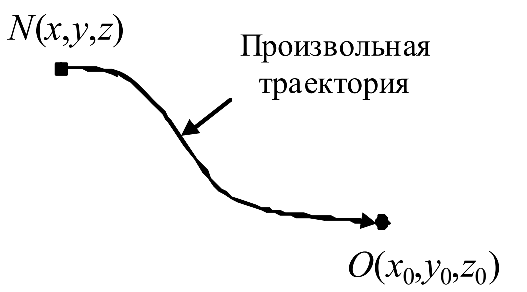
Работа консервативной силы не зависит от вида траектории точки между ее начальным (1) и конечным (2) положениями, ни от закона движения материальной точки по траектории: $A_{1-a-2} = A_{1-b-2} = A_{1-2}$, где $A_{1-a-2}$ и $A_{1-b-2}$ – работа консервативной сила при перемещении материальной точки из 1 в 2 по траекториям 1–*a*–2 и 1–*b*–2. Изменение направления движения материальной точки на противоположное вызывает изменение знака проекции консервативной силы $\vec{F}$ на направление перемещения, поэтому знак элементарной работы также изменяется $\delta A = (\vec{F} d\vec{r})$. Следовательно, $A_{1-b-2} = -A_{2-b-1}$, поэтому работа консервативной силы вдоль замкнутой траектории 1–*b*–2–*a*–1 равна нулю:




$$A_{1-b-2-a-1} = A_{1-b-2} + A_{2-a-1} = -A_{2-b-1} + A_{2-a-1} = 0.$$

Точки 1 и 2, а также участки замкнутой траектории 1–*a*–2 и 2–*b*–1 можно выбирать совершенно произвольно. Таким образом, работа консервативной силы на произвольной замкнутой траектории *L* точки ее приложения равна нулю: $\oint_L (\vec{F} d\vec{r}) = 0$. В этой формуле кружок на знаке интеграла показывает, что интегрирование производится по замкнутому контуру *L*.

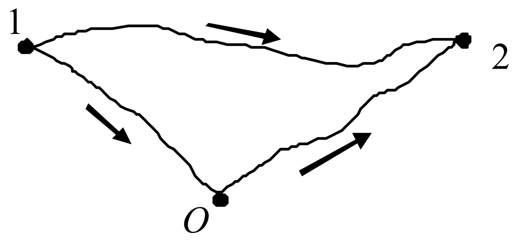
Пусть имеется консервативное силовое поле. Материальная точка (тело) расположена в точке $N(x,y,z)$ этого поля. Выберем произвольную точку *O* этого поля (ее координаты $x_0,y_0,z_0$), и назовем ее началом отсчета потенциальной энергии. В точке *O* потенциальная энергия материальной точки равна нулю.




**Потенциальной энергией материальной точки в точке *N* консервативного поля называется работа сил поля, совершаемая при перемещении материальной точки из точки *N* в точку *O*, принятую за начало отсчета потенциальной**

**энергии:** $E_П = \int\limits_N^O (\vec{F}d\vec{r})$, где $\vec{F}$ – сила поля; интеграл вычисляется по произвольной траектории между точками $N$ и $O$.

Так как поле консервативное, то потенциальная энергия является только функцией координат $x,y,z$ точки поля, в которой расположена материальная точка.




Если материальная точка под действием консервативных сил поля перемещается из произвольного начального положения 1 в произвольное конечное положение 2, то работа этих сил равна убыли потенциальной энергии материальной точки: $A_{1-2} = E_{П1} - E_{П2}$, где $E_{П1}$ и $E_{П2}$ – потенциальная энергия материальной точки в начальном и конечном положениях. Так как работа консервативных сил не зависит от формы траектории, то найдем работу консервативных сил по двум траекториям, одна из которых проходит через точку $O$ – начало отсчета потенциальной энергии. Обозначим $A_{1-2}$ – работа по траектории 1-2, $A_{1-O-2}$ – работа по траектории 1–$O$–2. Так как поле консервативное, то $A_{1-2} = A_{1-O-2}$.

Представим $A_{1-O-2}$ как сумму работ на участках 1–$O$ и $O$–2 по траектории 1–$O$–2, получим $A_{1-2} = A_{1-O-2} = A_{1-O} + A_{O-2} = A_{1-O} - A_{2-O}$.

Из определения потенциальной энергии $A_{1-O} = E_{П1}$, $A_{2-O} = E_{П2}$, тогда $A_{1-2} = E_{П1} - E_{П2} = -(E_{П2} - E_{П1}) = -\Delta E_П$. Элементарная работа консервативных сил $\delta A = -dE_П$.

**Уравнения $A = -\Delta E_П$ и $\delta A = -dE_П$ определяют связь работы консервативных сил с изменением потенциальной энергии поля (в интегральной и дифференциальной формах соответственно).**

Итак, работа консервативной силы определяется разностью потенциальной энергии тела в начальной и конечной точках пути. При элементарном перемещении работа равна минус изменению потенциальной энергии.

$$dA = \left(\vec{F}d\vec{r}\right) = -dE_П.$$

Знак минус говорит о том, что работа совершается за счет убыли потенциальной энергии.

Работа консервативных сил на конечном участке пути 1 – 2:

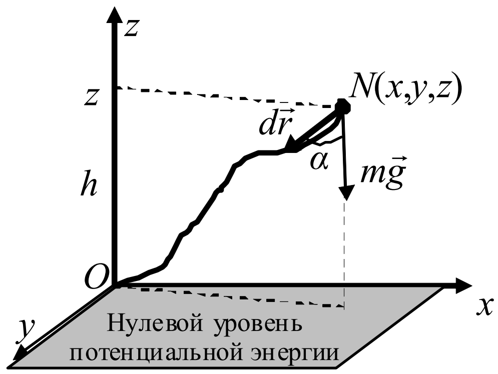
$$A_{12} = \int_1^2 \left(\vec{F}d\vec{r}\right) = -\left(E_{П2} - E_{П1}\right) = E_{П1} - E_{П2}. \qquad (28)$$

Потенциальная энергия – функция, которая определяется с точностью некоторой произвольной постоянной, определяющей нулевой уровень потенциальной энергии. Так как в формулу работы консервативной силы входит только разность значений $E_П$ в двух положениях частицы, то нулевой уровень отсчета энергии выбирают произвольно. То есть потенциальную энергию тела в каком-то определенном положении считают равной нулю. Энергию тела в других положениях отсчитывают относительно нулевого уровня. **Тело, находящееся в поле консервативных сил, обладает потенциальной энергией $E_П$ относительно нулевого уровня потенциальной энергии.**

**Конкретный вид функции $E_П$ зависит от характера силового поля.**

Для определения потенциальной энергии тела (материальной точки) в консервативном силовом поле, необходимо выбрать положение начала отсчета нулевого уровня потенциальной энергии и вычислить работу силы при перемещении по произвольной траектории в этом поле из данной точки поля в точку отсчета нулевого уровня потенциальной энергии.

**Пример 1:** потенциальная энергия тела массы $m$, поднятого на высоту $h$ над поверхностью Земли.




Пусть материальная точка (тело) массой $m$ находится в точке $N(x,y,z)$ однородного поля силы тяжести. В качестве начала отсчета потенциальной энергии выберем точку $O$ начала декартовой системы координат. Плоскость $xOy$ совместим с поверхностью Земли.

Потенциальная энергия материальной точки (тела) в точке $N$ поля равна работе силы тяжести, совершаемой при перемещении тела из точки $N$ с координатами $x$, $y$, $z$ в точку $O$ с координатами $x_0 = y_0 = z_0 = 0$. Тогда элементарная работа равна: $\delta A = \left(m\vec{g}d\vec{r}\right) = mg\left|d\vec{r}\right| \cdot \cos\alpha = -mgdz$, где $dz = -\left|d\vec{r}\right| \cdot \cos\alpha$.

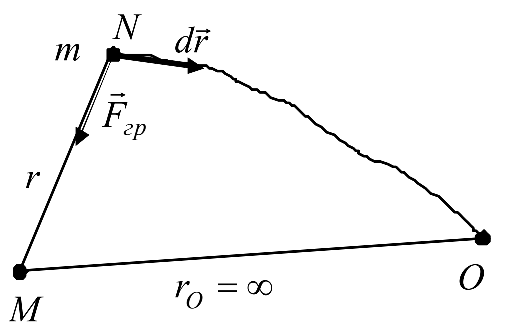
При перемещении тела из точки $N$ в точку $O$ работа силы тяжести равна: $A = -\int_z^0 mgdz = -mg(0-z) = mgz = mgh$.

Работа силы тяжести при падении тела на Землю равна потенциальной энергии

$$E_П = mgh,$$

если за нуль принята потенциальная энергия тела, лежащего на Земле.

**Пример 2:** потенциальная энергия тела массой $m$, находящегося в точке $N$ на расстоянии $r$ от тела массой $M$. Тело массой $M$ является источником гравитационного поля.

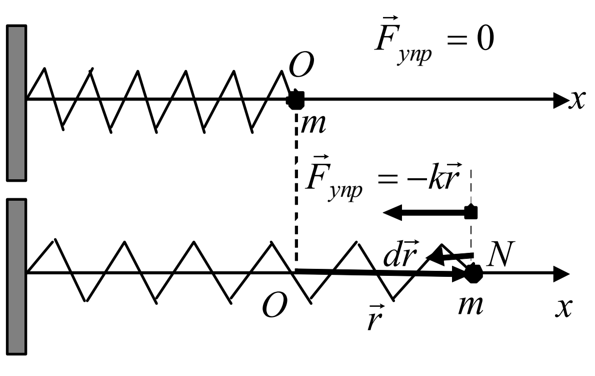



За начало отсчета потенциальной энергии выберем точку $O$ (на бесконечно большом удалении $r_O = \infty$ от тела массой $M$). Потенциальная энергия материальной точки (тела) в точке $N$ равна работе $A_{NO}$ гравитационной силы, совершаемой при перемещении тела из точки $N$ в точку $O$ по произвольной траектории.

Вычислим работу гравитационной силы:

$$A = \int_N^O \delta A = \int_N^O (\vec{F}_{гр} d\vec{r}) = -\int_r^{r_O} \gamma \frac{Mm}{r^2} dr = \gamma Mm \cdot (\frac{1}{r_O} - \frac{1}{r}) = -\gamma \frac{Mm}{r}.$$

Как следует из полученного выражения, если начало отсчета потенциальной энергии – точка $O$ – выбрано «в бесконечности» ($r_O = \infty$), то потенциальная энергия тела (материальной точки) во всех точках пространства вокруг тела массой $M$ **отрицательна**.




**Пример 3:** потенциальная энергия упруго деформированной пружины.

Рассмотрим пружину, один конец которой закреплен, а другой может перемещаться горизонтально под действием внешней силы. Направим координатную ось

$x$ параллельно оси пружины и выберем начало отсчета координаты $x$ ($x_0 = 0$) в положении незакрепленного конца недеформированной пружины (точка О).

Когда пружина не деформирована, тело (материальная точка) массой $m$ находится в точке с координатой $x = 0$. Примем точку $O$ за начало отсчета потенциальной энергии.

Потенциальная энергия материальной точки (тела массой $m$) в произвольном положении $N$ с координатой $x$ равна работе $A_{NO}$ упругой силы, совершаемой при перемещении тела из точки $N$ в точку $O$.

Вычислим работу упругой силы при перемещении тела из точки $N$ в точку $O$: $A = \int_N^O (-k\vec{r}d\vec{r}) = -\int_x^{x_0=0} kxdx = \frac{k}{2}(x^2 - x_0^2) = \frac{kx^2}{2}$.

Как следует из полученного выражения, материальная точка, находящаяся на конце деформированной пружины обладает потенциальной энергией $E_П = \frac{1}{2}kx^2$, если за начало отсчета потенциальной энергии принять координату $x_0 = 0$ не деформированной пружины.

## 4.4. СВЯЗЬ МЕЖДУ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИЕЙ И СИЛОЙ

Если материальная точка находится в консервативном силовом поле и известна зависимость действующей на материальную точку силы от координаты $N$ $(x,y,z)$ точки поля, то легко можно найти потенциальную энергию поля в этой точке: $E_П(x,y,z) = \int_N^O (\vec{F}d\vec{r})$, где интеграл вычисляется вдоль произвольной траектории между точкой $N$ и точкой $O$, принятой за начало отсчета потенциальной энергии.

Потенциальная энергия тела является функцией от его координат:

$$E_П = E_П(x, y, z).$$

Зная вид этой функции, можно найти силу, действующую на тело. Установим связь между потенциальной энергией и силой.

Рассмотрим перемещение тела под действием силы $\vec{F}$. Разложим силу на три составляющие вдоль координатных осей и рассмотрим работу каждой составляющей силы:

$$\vec{F} = \vec{i}F_x + \vec{j}F_y + \vec{k}F_z,\ d\vec{r} = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz.$$

Тогда $dA = (\vec{F}d\vec{r}) = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -dE_П(x, y, z)$.

Чтобы определить компоненты вектора силы, поступим следующим образом. Пусть, совершая элементарное перемещение, материальная точка движется параллельно оси *x* (вектор $d\vec{r}$ параллелен оси *x*). В этом случае координаты *y* и *z* материальной точки остаются постоянными (*y = const*, *z = const*), значит $dy = dz = 0$. Тогда

$$F_x dx = -\left[dE_П(x, y, z)\right]_{y,z=const}.$$

Отсюда

$$F_x = -\left[\frac{dE_П(x, y, z)}{dx}\right]_{y,z=const} = -\frac{\partial E_П(x, y, z)}{\partial x}.$$

Здесь $\frac{\partial E_П}{\partial x}$ – частная производная функции $E_П$ (*x*, *y*, *z*), вычисленная в предположении, что переменные *y* и *z* остаются неизменными, а изменяется лишь величина *x*.

Итак $$F_x = -\frac{\partial E_П}{\partial x},\ F_y = -\frac{\partial E_П}{\partial y},\ F_z = -\frac{\partial E_П}{\partial z}.$$

Эти три формулы можно объединить в одну векторную формулу. С этой целью умножим их на единичные векторы координатных осей $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ и сложим:

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

или

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial E_П}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_П}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_П}{\partial z}\vec{k}\right).$$

Выражение, стоящее в скобках, называют <u>градиентом функции</u> $E_П$ и обозначают $\overrightarrow{grad}E_П$: $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_П = -\nabla E_П$.

Градиентом скалярной функции $E_П(x,y,z)$ называется векторная функция, которая по определению равна: $\overrightarrow{grad}E_П = \frac{\partial E_П}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_П}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_П}{\partial z}\vec{k}$. Градиент представляет собой оператор, то есть правило, по которому всякой скалярной функции $E_П(x,y,z)$ ставится в соответствие векторная функция тех же переменных. **Градиент скалярной функции указывает направление наиболее быстрого возрастания функции.**

Сила равна градиенту потенциальной энергии, взятому с обратным знаком. Знак минус означает, что сила всегда направлена в сторону уменьшения потенциальной энергии.

Эквипотенциальной поверхностью называется поверхность, во всех точках которой потенциальная энергия имеет одно и то же значение (поверхность постоянной потенциальной энергии). Уравнение эквипотенциальной поверхности можно записать: $E_П(x, y, z) = const$.

**Пример 1:** уравнение эквипотенциальной поверхности в однородном поле силы тяжести: $E_П(x, y, z) = mgz = const, \quad z = const$. Эквипотенциальная поверхность в однородном поле силы тяжести – горизонтальные плоскости *z = const*.

**Пример 2:** уравнение эквипотенциальной поверхности в гравитационном поле: $E_П(r) = -\gamma \frac{Mm}{r} = const, \quad r = const$. Эквипотенциальные поверхности в гравитационном поле – это сферические поверхности (сферы *r = const*).

**Вектор силы, действующей на материальную точку, помещенную в потенциальное поле, всегда направлен перпендикулярно эквипотенциальной поверхности в сторону уменьшения потенциальной энергии.**

Докажем это утверждение. Пусть материальная точка совершила бесконечно малое перемещение $d\vec{r}$ по эквипотенциальной поверхности. Так как во всех точках эквипотенциальной поверхности потенциальная энергия имеет одинаковое значение, то изменение потенциальной энергии $dE_П = 0$. Элементарная работа силы $\vec{F}$ равна: $\delta A = (\vec{F} d\vec{r}) = -dE_П = 0$. Отсюда следует, что скалярное произведение $(\vec{F} d\vec{r}) = 0$ или $\vec{F} \perp d\vec{r}$. Так как $d\vec{r}$ принадлежит эквипотенциальной поверхности, то вектор силы $\vec{F}$ всегда перпендикулярен эквипотенциальной поверхности.

## 4.5. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ПОЛНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Рассмотрим материальную точку (тело), которая находится в консервативном силовом поле, ее скорость $\vec{\upsilon}$, а потенциальная энергия задана функцией $E_П = E_П(x, y, z)$.

**Полной механической энергией *E* материальной точки называется сумма ее кинетической и потенциальной** $E_П$ энергии: $E = E_K + E_П = \dfrac{m\upsilon^2}{2} + E_П$.

Сформулируем закон сохранения полной механической энергии материальной точки.

**Если на материальную точку (тело) действуют только консервативные силы, ее полная механическая энергия с течением времени не изменяется (сохраняется):**

$$E = E_K + E_П = \frac{m\upsilon^2}{2} + E_П = const.$$

Доказательство этого утверждения основано на теореме о кинетической энергии и свойствах консервативных сил. Пусть материальная точка переместилась из произвольного начального положения 1 в произвольное конечное положение 2 (из точки 1 в точку 2 пространства). Согласно теореме о кинетической энергии работа $A_{1\text{-}2}$ сил поля равна приращению кинетической энергии материальной точки

$$A_{1-2} = E_{K2} - E_{K1},$$

где $E_{K2}$ и $E_{K1}$ – кинетическая энергия материальной точки в конечном и начальном положениях соответственно.

В процессе перемещения на материальную точку действуют только консервативные силы, работа которых равна убыли потенциальной энергии:

$$A_{1-2} = E_{П1} - E_{П2},$$

где $E_{П1}$ и $E_{П2}$ – потенциальная энергия материальной частицы в начальном и конечном положениях соответственно.

Так как $A_{1-2} = E_{K2} - E_{K1}$ и $A_{1-2} = E_{П1} - E_{П2}$, то

$$E_{K2} - E_{K1} = E_{П1} - E_{П2} \text{ или } E_{K2} + E_{П2} = E_{K1} + E_{П1},\ E_2 = E_1,$$

где $E_2$ и $E_1$ – полная механическая энергия материальной точки в конечном и начальном положении соответственно.

Это выражение означает, что полная механическая энергия материальной точки в начальном положении равна полной механической энергии в конечном положении. Поскольку начальное и конечное положения выбраны произвольно, то можно утверждать, что полная механическая энергия материальной точки в процессе движения не изменяется (сохраняется).

**Таким образом, если материальная точка находится в силовом поле, в котором действуют только консервативные силы, то полная механическая энергия материальной точки не изменяется со вре-**

**менем $E = const$. Консервативные силы не могут изменить полную механическую энергию материальной точки в процессе движения.**

Если на материальную точку, расположенную в консервативном силовом поле кроме консервативных сил действуют любые другие силы (не консервативные), то полная механическая энергия материальной точки изменяется со временем. Примером не консервативных сил в механике являются силы трения, силы сопротивления. Силы трения и силы сопротивления называют *диссипативными*, так как они приводят к диссипации энергии – превращение механической энергии в теплоту.

Закон изменения полной механической энергии материальной точки. **Работа диссипативных сил $A_{1\text{-}2дис}$ при перемещении материальной точки из произвольного начального положения в произвольное конечное положение равна приращению полной механической энергии материальной точки:**

$$A_{1-2дис} = E_2 - E_1,$$

где $E_2$ и $E_1$ – полная механическая энергия материальной точки в конечном и начальном положениях соответственно.

Докажем это утверждение. Согласно теореме о кинетической энергии, работа $A_{1\text{-}2}$ всех приложенных к материальной точке сил при ее перемещении из начального положения в конечное, равна приращению кинетической энергии материальной точки:

$$A_{1-2} = E_{K2} - E_{K1},$$

где $E_{K2}$ и $E_{K1}$ – кинетическая энергия материальной точки в конечном и начальном положениях соответственно.

Работа $A_{1\text{-}2}$ складывается из работы $A_{1\text{-}2конс}$ консервативных сил и работы $A_{1\text{-}2дис}$ диссипативных (не консервативных) сил:

$$A_{1\text{-}2} = A_{1\text{-}2конс} + A_{1\text{-}2дис}.$$

Однако работа $A_{1\text{-}2конс}$ консервативных сил равна убыли потенциальной энергии материальной точки:

$$A_{1-2конс} = E_{П1} - E_{П2},$$

где $E_{П1}$ и $E_{П2}$ – потенциальная энергия материальной частицы в начальном и конечном положениях соответственно.

То $A_{1\text{-}2} = E_{П1} - E_{П2} + A_{1\text{-}2дис}$, или $E_{К2} - E_{К1} = E_{П1} - E_{П2} + A_{1\text{-}2дис}$. Преобразуем выражение: $(E_{К2} + E_{П2}) - (E_{К1} + E_{П1}) = A_{1\text{-}2дис}$ или $A_{1\text{-}2дис} = E_2 - E_1$,

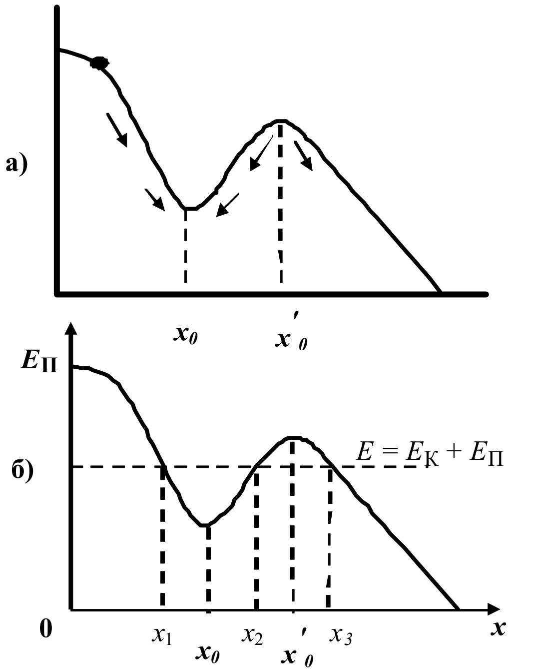
где $E_2$ и $E_1$ – полная механическая энергия материальной точки в конечном и начальном положении соответственно.

Работа неконсервативных (диссипативных) сил при перемещении материальной точки из произвольного начального положения в произвольное конечное положение равна изменению полной механической энергии материальной точки в этих положениях $A_{1\text{-}2дис} = E_2 - E_1 = \Delta E$.

Только неконсервативные силы могут изменить полную механическую энергию материальной точки.

## 4.6. ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ КРИВЫЕ. УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим материальную точку, положение которой может быть определено с помощью одной величины, например, координаты $x$, т.е. потенциальная энергия точки является функцией $E_П = E_П(x)$.




Графическая зависимость потенциальной энергии от координаты $x$ называется <u>потенциальной кривой</u>. Зная вид функции $E_П(x)$, можно сделать ряд заключений о характере движения частицы.

В качестве примера рассмотрим шарик, скользящий без трения по изогнутой в вертикальной плоскости проволоке. На шарик действует консервативная сила – сила тяжести. График потенциальной энергии $E_П(x)$ показан на рисунке. Проанализируем эту кривую. Полная энергия шарика $E$ изображена на графике горизонтальной линией, поскольку имеет место закон сохранения энергии $E = E_К + E_П$.

Частица может находиться только там, где $E_П(x) \le E$, т.е. в областях от $x_1$ до $x_2$ или от $x_3$ до бесконечности. В области $x < x_1$ и $x_2 < x < x_3$ частица проникнуть не может, т.к. потенциальная энергия не может стать больше полной энергии. Таким образом, область $x_2 < x < x_3$ представляет собой <u>потенциальный барьер</u>, через который частица не может проникнуть при данном запасе полной энергии. Область $x_1 < x < x_2$ называется <u>потенциальной ямой.</u>

Минимуму потенциальной энергии соответствует на графике точка с координатой $x_0$. Условие минимума потенциальной энергии имеет вид

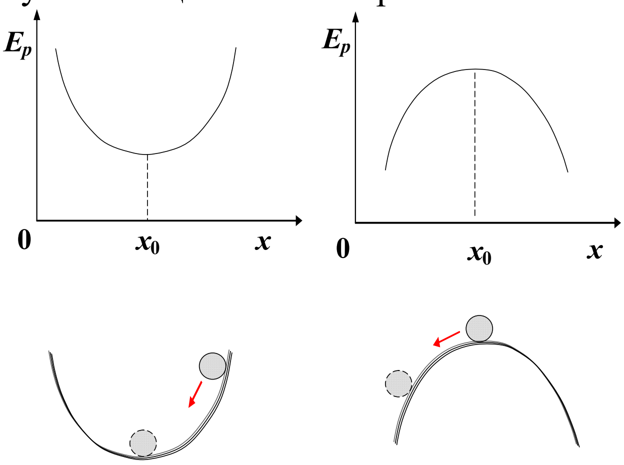
$$\frac{dE_П}{dx} = 0.$$

Поскольку действующая на частицу сила

$$F_x = -\frac{dE_П}{dx},$$

то в точке $x_0$ $F_x = 0$. При смещении частицы из положения $x_0$ она испытывает действие возвращающей силы, поэтому положение $x_0$ является положением устойчивого равновесия. Итак, устойчивому равновесию соответствует минимум потенциальной энергии частицы. В точке $x_0'$, соответствующей максимуму потенциальной энергии, выполняются эти же условия равновесия. Однако это равновесие будет неустойчивым: при смещении частицы из положения $x_0'$ возникает сила, которая будет удалять его из положения равновесия.

Таким образом, неустойчивому равновесию соответствует максимум потенциальной энергии.




**а) устойчивое равновесие**

**б) неустойчивое равновесие**

В точке $x_0$: $\frac{dE_p}{dx} = 0 \Rightarrow F = 0 \Rightarrow$ тело в равновесии.

Тело находится в положении устойчивого равновесия, если потенциальная энергия тела минимальная.

Этот вывод распространяется и на систему тел.

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Как найти работу переменной силы?
2. Что называется мощностью? Выведите ее формулу.
3. Что называется кинетической энергией?
4. Дайте определение потенциальной энергии.
5. Чем объясняется изменение потенциальной энергии?
6. Какова связь между силой и потенциальной энергией?
7. Что такое потенциальная кривая? Поясните на примере, как по виду потенциальной кривой сделать заключение о характере движения тела.
8. Назовите условия устойчивого и неустойчивого равновесия.

## Лекция 5

# ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

### Термины и понятия

Метод интегрального исчисления
Момент импульса
Момент инерции тела
Момент силы
Плечо силы
Реакция опоры
Теорема Штейнера

## 5.1. МОМЕНТ ИНЕРЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

При изучении вращения твердых тел будем пользоваться понятием момента инерции.

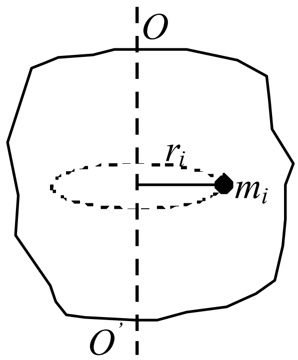
Разобьем тело на такие малые части, что каждую из них можно считать материальной точкой. Пусть $m_i$ – масса $i$-ой материальной точки, $r_i$ – ее расстояние до некоторой оси $OO'$.

**Величина, равная произведению массы материальной точки на квадрат кратчайшего расстояния ее до данной оси, называется моментом инерции материальной точки относительно оси:**

$$I_i = m_i r_i^2 . \tag{29}$$

Сумма моментов инерции всех материальных точек тела называется моментом инерции тела относительно некоторой оси:

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 . \tag{30}$$




Момент инерции твердого тела зависит, как нетрудно видеть, от распределения масс относительно интересующей нас оси.

Если тело представляет собой обруч массы $m$, толщина которого мала по сравнению с радиусом $R$, то момент его инерции относительно оси, проходящей через центр и перпендикулярной к плоскости обруча, равен

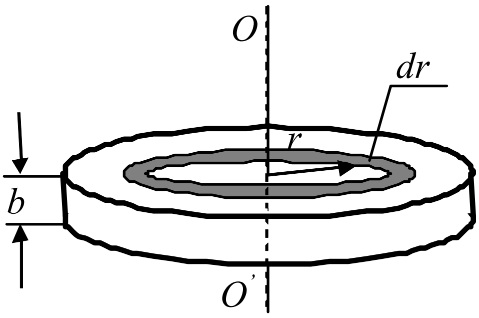
$$I = \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i R^2 = R^2 \sum_i m_i = mR^2.$$

Для тел более сложной формы суммирование выражения (30) производится методами интегрального исчисления согласно формуле:

$$I = \int_V r^2 dm\,, \tag{31}$$

где интегрирование производится по всему объему тела. Величина $r$ в этом случае есть функция положения точки с координатами $x$, $y$, $z$.

В качестве примера найдем момент инерции однородного диска относительно оси, перпендикулярной к плоскости диска и проходящей через его центр. Разобьем диск на кольцевые слои толщиной $dr$.




Все точки одного слоя будут находиться на одинаковом расстоянии от оси, равном $r$. Объем такого слоя равен:

$$dV = b \cdot 2\pi\, r\, dr\,,$$

где $b$ – толщина диска. Поскольку диск однороден, плотность его $\rho$ во всех точках одинакова и

$$dm = \rho \cdot\ dV = 2\pi\ r\ b\ \rho\ dr\,,$$

где $dm$ – масса кольцевого слоя.

Теперь по формуле (31) находим момент инерции.

$$I = \rho\int_0^R r^2\ b\ 2\pi\ r\ dr\,,$$

где $R$ – радиус диска.

$$I = 2\pi\ \rho\ b\int_0^R r^3 dr = 2\pi\ b\ \rho\frac{R^4}{4}\,.$$

Наконец, введя массу диска $m$ равную произведению плотности $\rho$ на объем диска $b\ \pi\ R^2$, получим

$$I = \frac{mR^2}{2}\,.$$

Моменты инерции некоторых однородных твердых тел относительно оси, проходящей через центр масс тела, приведены в следующей таблице:

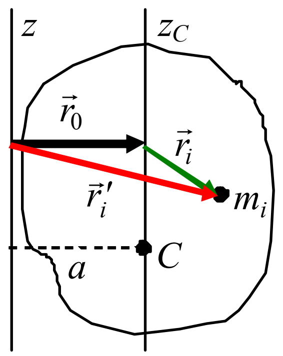
| Твердое тело | Положение оси вращения | Момент инерции |
|---|---|---|
| Тонкий стержень длины $\ell$ | Перпендикулярна стержню и проходит через центр тяжести | $1/12\, m\ell^2$ |
| Сплошной цилиндр радиуса $R$ | Ось вращения совпадает с осью цилиндра и проходит через центр тяжести | $1/2\, mR^2$ |
| Тонкий диск радиуса $R$ | Ось вращения совпадает с диаметром диска | $1/4\, mR^2$ |
| Шар радиуса $R$ | Ось вращения проходит через центр тяжести шара | $2/5\, mR^2$ |

Если известен момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс, то можно найти момент инерции относительно любой другой параллельной оси. Для этого надо воспользоваться теоремой Гюйгенса-Штейнера:

**момент инерции тела $I$ относительно произвольной оси равен моменту его инерции $I_c$ относительно параллельной ей оси, проходящей через центр масс $C$ тела, сложенному с произведением массы тела $m$ на квадрат расстояния $a$ между осями:**

$$I = I_c + ma^2. \qquad (32)$$

Найдем связь между моментами инерции тела относительно двух параллельных осей, одна из которых проходит через центр масс. Найдем момент инерции тела относительно оси $z$ параллельной оси $z_C$. Ось $z_C$ проходит через центр масс тела. Разделим мысленно тело на частицы массой $m_i$ , где $i$ – порядковый номер. Определим положение каждой частицы относительно осей $z$ и $z_C$ . В соответствии с определением момента инерции $I_i = m_i r_i^2$, где $r_i$ – это кратчайшее расстояние до оси вращения (радиус окружности, которую описывает точка при своем движении вокруг оси вращения).




Из рисунка видно, что $\vec{r}_i' = \vec{r}_i + \vec{r}_0$, тогда момент инерции точки массой $m_i$ относительно оси $z$ равен: $I_i = m_i r_i'^2$, а для всего тела момент инерции относительно оси $z$ равен сумме моментов инерции всех частиц тела относительно этой же оси:

$$I_z = \sum_i I_i = \sum_i m_i r_i'^2 = \sum_i m_i (\vec{r}_i + \vec{r}_0)^2 = \sum_i m_i r_i^2 + \sum_i m_i r_0^2 + 2\sum_i m_i (\vec{r}_i \cdot \vec{r}_0).$$

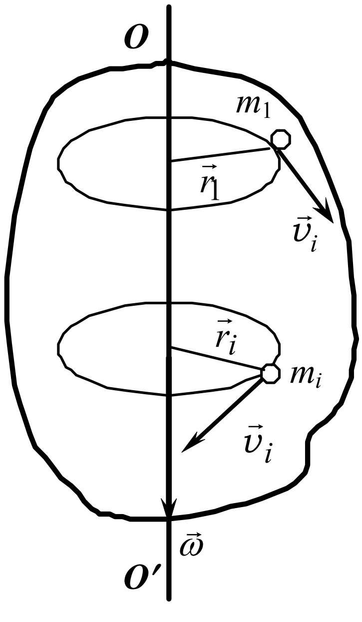
По определению $I_{z_C} = \sum m_i r_i^2$ – момент инерции тела относительно оси $z_C$, проходящей через центр масс тела; $\sum_i m_i = m$, тогда $\sum_i m_i r_0^2 = ma^2$. Выражение $2\sum_i m_i (\vec{r}_i \cdot \vec{r}_0)$ можно преобразовать $2\sum_i m_i (\vec{r}_i \cdot \vec{r}_0) = 2(\sum_i m_i \vec{r}_i \cdot \vec{r}_0)$. Величина, равная $\sum_i m_i \vec{r}_i = m\vec{r}_C$ определяет положение центра масс тела относительно оси $z_C$. Из рисунка видно, что $\vec{r}_C = 0$, так как центр масс лежит на оси $z_C$.

Тогда получим $I_z = I_{z_C} + ma^2$ – момент инерции $I_z$ тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции тела $I_{z_C}$ относительно параллельной ей оси $z_C$, проходящей через центр масс, и величины $ma^2$, где $m$ – масса тела, $a$ – расстояние между осями.

Пример. Момент инерции тонкого стержня (массы $m$ и длины $\ell$) относительно оси, перпендикулярной стрежню и проходящей через его конец, равен

$$I = \frac{1}{12} m\ell^2 + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} m\ell^2.$$

## 5.2. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА




Пусть твердое тело вращается вокруг неподвижной оси $OO'$. Мысленно разобьем тело на материальные точки массой $m_i$. Каждая материальная точка движется по окружности радиуса $r_i$ с линейной скоростью $\vec{v}_i$. Кинетическая энергия вращающегося тела равна сумме кинетических энергий этих точек:

$$E_K = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2}.$$

Линейная скорость материальной точки зависит от расстояния до оси вращения $r_i$:

$$v_i = \omega r_i,$$

где $\omega$ – угловая скорость тела.

Отсюда $E_K = \frac{\omega^2}{2}\sum_i m_i r_i^2$ ,

так как $I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$ , то $$E_K = \frac{I\omega^2}{2}, \quad (33)$$

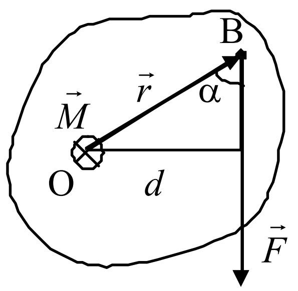
где $I$ – момент инерции тела относительно оси вращения, $\omega$ – его угловая скорость.

В случае плоского движения тела, например, шара, скатывающегося с наклонной плоскости без скольжения, энергия складывается из энергии поступательного движения и энергии вращения:

$$E_K = \frac{m\upsilon_c^2}{2} + \frac{I_c\omega^2}{2},$$

где $m$ – масса тела; $\upsilon_c$ – скорость центра масс тела; $I_c$ – момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс; $\omega$ – угловая скорость тела.

## 5.3. МОМЕНТ СИЛЫ




Рассмотрим вращение тела вокруг неподвижной оси. Пусть сила $\vec{F}$ лежит в плоскости, перпендикулярной к оси вращения 0. $\vec{r}$ – радиус вектор точки приложения силы относительно оси вращения; $d$ – кратчайшее расстояние от оси вращения до линии действия силы, называемое плечом силы.

Векторная величина, численно равная произведению силы на плечо, называется моментом силы относительно оси вращения.

$$M = F \cdot d. \quad (34)$$

Как видно из рисунка:

$$d = r \cdot \sin\alpha,$$

$$M = F \cdot r \cdot \sin\alpha,$$

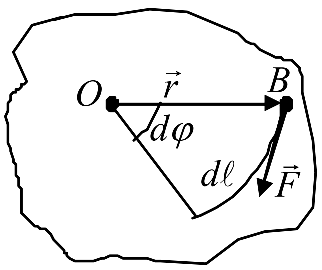
то есть в векторном виде:

$$\vec{M} = \left[\vec{r}\vec{F}\right].$$

Направление $\vec{M}$ совпадает с направлением поступательного движения винта при его вращении от $\vec{r}$ к $\vec{F}$ (в нашем примере вдоль оси вращения «от нас»).

В частном случае, когда $\alpha = 0$, $M = 0$ (линия действия силы пересекает ось вращения). Такая сила уравновешивается реакцией опоры и вращения не вызывает.

## 5.4. УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА




Пусть тело вращается вокруг оси $O$ под действием силы $\vec{F}$. Найдем работу этой силы.

При повороте тела на бесконечно малый угол $d\varphi$ точка приложения силы $B$ проходит путь:

$$d\ell = r \cdot d\varphi,$$

где $r$ – радиус окружности, описываемой точкой $B$. Элементарная работа равна:

$$dA = F \cdot r \cdot d\varphi = F \cdot r \cdot \omega \cdot dt. \qquad (35)$$

Эта работа идет на увеличение кинетической энергии вращающегося тела, так как $E_k = \dfrac{I\omega^2}{2}$, а $dA = dE_K$, то

$$dE_K = d\left(\frac{I\omega^2}{2}\right) = I\ \omega\ d\omega.$$

Поэтому $\qquad F \cdot r \cdot \omega \cdot dt = I\ \omega\ d\omega.$

Радиус окружности $r$ является плечом силы $F$, следовательно, $M = F \cdot r$ и

$$Mdt = Id\omega$$

или

$$M = I\frac{d\omega}{dt} = I \cdot \varepsilon.$$

Учтя, что векторы $\vec{M}$ и $\vec{\varepsilon}$ имеют одинаковое направление, придем к соотношению: $\qquad \vec{M} = I\vec{\varepsilon}. \qquad (36)$

Это – <u>основное уравнение динамики вращательного движения</u> вокруг неподвижной оси. Оно напоминает второй закон Ньютона для поступательного движения. Роль массы играет момент инерции $I$, роль линейного ускорения – угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$, роль силы – момент силы $\vec{M}$.

Из этого уравнения, в частности, видно, что момент инерции $I$ определяет инерционные свойства тела при вращении: при одном и том же значении момента сил $\vec{M}$, тело с большим моментом инерции приобретает меньшее угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$. Заметим, что работа при вращении тела согласно (35) равна: $dA = F \cdot r \cdot d\varphi = F \cdot r \cdot \omega \cdot dt$. На рис.22 сила $\vec{F} \perp \vec{r}$, поэтому $\vec{M} = \left[\vec{r}\vec{F}\right]$ или $M = F \cdot r$. С другой стороны $d\vec{\varphi} = \vec{\omega} \cdot dt$ – угловое перемещение. Вектора $\vec{M}$ и $d\vec{\varphi}$ направлены по одной прямой, поэтому $dA = (\vec{M} \cdot d\vec{\varphi})$ или

$$dA = M \cdot d\varphi. \tag{37}$$

Сравним с формулой для работы при поступательном движении тела $dA = (\vec{F} \cdot d\vec{r})$.

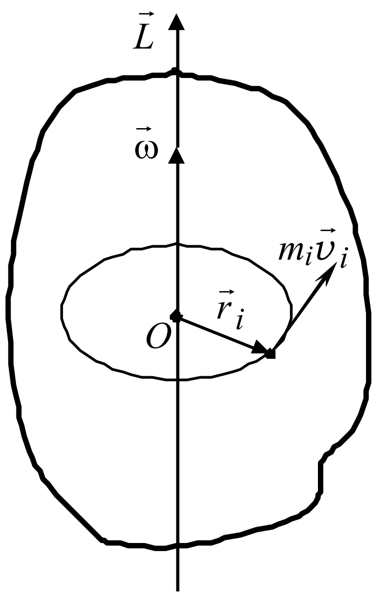
## 5.5. МОМЕНТ ИМПУЛЬСА

Рассмотрим движение отдельных точек тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

Каждая из них массой $m_i$ движется по окружности постоянного радиуса $r_i$. Ее линейная скорость $\vec{\upsilon}_i$, импульс $m_i\,\vec{\upsilon}_i$. Скорость и импульс перпендикулярны радиусу, то есть радиус является плечом вектора $m_i\,\vec{\upsilon}_i$. Поэтому можно записать, что момент импульса данной точки равен

$$L_i = m_i\,\upsilon_i\,r_i, \qquad \vec{L}_i = \left[\vec{r}_i\vec{P}_i\right]$$

и направлен по оси вращения в сторону, определяемую правилом правого винта. Учитывая, что $\upsilon_i = \omega r_i$, получим: $L_i = m_i r_i^2 \omega = I_i \omega_i$, где $I_i$ – момент инерции материальной точки $m_i$ относительно оси вращения.




Момент импульса твердого тела относительно оси равен сумме моментов импульсов всех его точек:

$$L = \sum_i I_i\omega, \text{ или}$$

$$L = \sum_i m_i r_i^2 \omega = \omega \sum_i m_i r_i^2 = I\omega.$$

Итак, **момент импульса твердого тела относительно оси равен произведению момента инерции тела относительно этой же оси на угловую скорость.**

Учтя, что векторы $\vec{L}$ и $\vec{\omega}$ имеют одинаковое направление, придем к соотношению:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}. \tag{38}$$

При описании динамики вращательного движения момент импульса играет такую же роль, что и импульс при поступательном движении.

Сопоставим основные величины и уравнения, определяющие вращение тела вокруг неподвижной оси и его поступательное движение.

| **Поступательное движение** | | **Вращательное движение** | |
|---|---|---|---|
| Масса | $m$ | Момент инерции | $I$ |
| Скорость | $\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ | Угловая скорость | $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$ |
| Ускорение | $\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$ | Угловое ускорение | $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ |
| Сила | $\vec{F}$ | Момент силы | $\vec{M}$ |
| Импульс | $\vec{P} = m\vec{\upsilon}$ | Момент импульса | $\vec{L} = I\vec{\omega}$ |
| Основное уравнение динамики | $\vec{F} = m\vec{a}$ | Основное уравнение динамики | $\vec{M} = I\vec{\varepsilon}$ |
| Работа | $dA = F_S dS$ | Работа | $dA = Md\varphi$ |
| Кинетическая энергия | $\frac{m\upsilon^2}{2}$ | Кинетическая энергия | $\frac{I\omega^2}{2}$ |

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое момент инерции тела?
2. Какой физический смысл имеет момент инерции?
3. Выведите формулу для момента инерции обруча.
4. Сформулируйте и поясните теорему Штейнера.
5. Что называется моментом силы относительно оси вращения?
6. Выведите и сформулируйте уравнение динамики вращательного движения твердого тела.
7. Что такое момент импульса материальной точки? Твердого тела?
8. Как определяется направление вектора момента импульса?
9. Выведите и сформулируйте закон сохранения момента импульса. Приведите примеры.

## Лекция 6

# ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В МЕХАНИКЕ

### Термины и понятия

Внешние силы системы
Внутренние силы системы
Высший порядок малости
Замкнутая система тел
Изотропность
Механическая система
Непрерывное отделение
Непрерывное присоединение
Однородность времени
Однородность пространства
Постоянная интегрирования
Продукты сгорания
Равнодействующая
Реактивная сила
Свободное падение
Уравнение Мещерского (уравнение движения тела с переменной массой)
Формула Циолковского
Центр масс (центр инерции)

## 6.1. ИЗОПРОПНОСТЬ И ОДНОРОДНОСТЬ ПРОСТРАНСТВА И ВРЕМЕНИ

Совокупность материальных точек (или тел) называется механической системой. Состояние системы характеризуется одновременным заданием координат и скоростей всех ее частиц. При движении системы ее состояние изменяется со временем. Существуют, однако, такие величины, которые обладают замечательным свойством сохраняться во времени. Среди этих сохраняющихся величин наиболее важную роль играют энергия, импульс и момент импульса. Законы сохранения энергии, импульса и момента импульса имеют глубокие корни. Они связаны с фундаментальными свойствами пространства и времени – однородностью и изотропностью.

Так, закон сохранения импульса связан с однородностью пространства. Однородность пространства означает, что свойства пространства одинаковы во всех точках: если замкнутую систему тел перенести из одного места пространства в другое, поставив при этом все тела в ней в те же условия, то это не отразится на ходе физических процессов.

Закон сохранения момента импульса является следствием изотропности пространства. Изотропность пространства означает, что свойства пространства в каждой точке одинаковы во всех направлениях: физические процессы не изменяются при повороте замкнутой системы в пространстве на любой угол.

Закон сохранения энергии связан с однородностью времени. Однородность времени означает, что протекание физических явлений (в одних и тех же условиях) в разное время их наблюдения одинаково. Например, при свободном падении тела в поле сил тяжести его скорость и пройденный путь зависят от начальной скорости и продолжительности свободного падения и не зависят от того, когда тело станет падать.

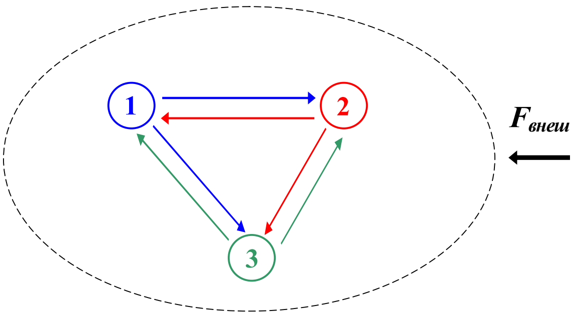
Законы сохранения далеко выходят за рамки механики и представляют собой универсальные законы природы. До сих пор не обнаружено ни одного явления, где бы эти законы нарушались. Они безошибочно «действуют» и в области элементарных частиц и в области космических объектов. Законы сохранения являются эффективным инструментом исследования, которым повседневно пользуются физики.

Изучение законов сохранения начнем с закона сохранения импульса.

## 6.2. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК (ТЕЛ)

Закон сохранения импульса является следствием второго и третьего законов Ньютона. Тела, входящие в систему, могут взаимодействовать как между собой, так и с телами, не принадлежащими системе.
**Механическая система** – совокупность материальных точек (тел), рассматриваемых как единое целое.

**Внутренние силы** – силы взаимодействия между материальными точками, входящими в механическую систему.




$$F_{внутр} = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} \sum_{k=1}^{n} F_{ik} = 0.$$

Для 3-х тел:

1: $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{13}$

2: $\vec{F}_{21} + \vec{F}_{23}$

3: $\vec{F}_{31} + \vec{F}_{32}$

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} = 0$$

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0.$$

**Внешние силы** – силы, которые действуют на систему со стороны тел, не входящих в систему.

**Замкнутая (изолированная) система** – система, на которую не действуют внешние силы.

Рассмотрим систему, состоящую из $n$ материальных точек (или тел).

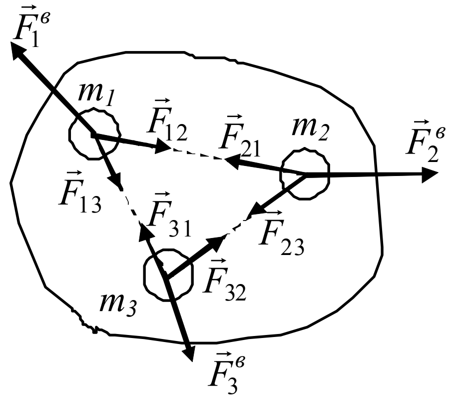
Пусть на каждое тело массой $m_i$ действуют внутренние силы $\vec{F}_{ik}$ и внешние силы $\vec{F}_i^{\,в}$; тело приобретает скорость $\vec{\upsilon}_i$. Запишем второй закон Ньютона для каждого тела:

$$\frac{d}{dt}\left(m_1\vec{\upsilon}_1\right)=\vec{F}_{12}+\vec{F}_{13}+......+F_1^{\,в},$$

$$\frac{d}{dt}\left(m_2\vec{\upsilon}_2\right)=\vec{F}_{21}+\vec{F}_{23}+......+F_2^{\,в},$$

– – – – – – – – – – – – – – – – – – – – –

$$\frac{d}{dt}\left(m_n\vec{\upsilon}_n\right)=\vec{F}_{n1}+\vec{F}_{n2}+......+F_n^{\,в}.$$




Складываем эти уравнения. Так как по третьему закону Ньютона $\vec{F}_{ik}=-\vec{F}_{ki}$, то сумма всех внутренних сил равна 0.

Имеем:

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{\upsilon}_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{\,в}.$$

Здесь $\sum\limits_{i=1}^{n}m_i\vec{\upsilon}_i=\vec{P}$ – импульс системы тел, $\sum\limits_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{\,в}=\vec{F}^{\,в}$ – равнодействующая всех внешних сил.

Таким образом, **производная по времени от импульса механической системы равна геометрической сумме внешних сил, действующих на систему:**

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=\vec{F}^{\,в}.$$

Полученное выражение представляет собой закон изменения импульса $\vec{P}$ системы материальных точек и показывает, что скорость изменения импульса системы определяется только внешними силами.

Из этого уравнения следует, что приращение импульса системы равно импульсу внешних сил: $d\vec{P} = \vec{F}^{в} dt$ или $\Delta\vec{P} = \vec{P}_K - \vec{P}_H = \int_0^t \vec{F}^{в} dt$, где $\vec{P}_{\text{К}}$ и $\vec{P}_{\text{Н}}$ – импульс системы в конечном и начальном состоянии соответственно.

Рассмотрим замкнутую систему (внешние силы отсутствуют). Тогда

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0, \text{ т.е. } \vec{P} = const.$$

Последнее выражение является законом сохранения импульса: **импульс замкнутой системы сохраняется, то есть не изменяется с течением времени.**

Отметим, что закон сохранения импульса выполняется и для незамкнутой системы, если геометрическая сумма всех внешних сил равна 0.

Импульс системы материальных точек приблизительно сохраняется (не изменяется), если ограниченная по модулю внешняя сила действует в течение очень малого промежутка времени $\Delta t$. Действительно, согласно уравнению $\Delta\vec{P} = \vec{P}_K - \vec{P}_H = \int_0^t \vec{F}^{в} dt$ приращение импульса за промежуток времени $\Delta t$ равно: $\Delta\vec{P} = \int_0^{\Delta t} \vec{F}^{в} dt = \vec{F}^{в}_{ср} \Delta t$, где $\vec{F}^{в}_{ср}$ – средняя внешняя сила за промежуток времени $\Delta t$.

Если время $\Delta t$ мало, то $\Delta\vec{P} \approx 0$ или $\vec{P} = const$, то есть импульс приблизительно остается постоянным.

Пример: во время взрыва в воздухе снаряда на него действует внешняя сила – сила тяжести. Время взрыва мало, поэтому импульсом силы тяжести можно пренебречь (не учитывать). Следовательно, импульс снаряда непосредственно перед взрывом равен суммарному импульсу образовавшихся осколков сразу после взрыва.

Для неограниченной по модулю внешней силы это утверждение несправедливо.

Закон сохранения импульса является фундаментальным законом природы. Он обладает большей общностью, чем законы классической механики (законы Ньютона).

## 6.3. ДВИЖЕНИЕ ЦЕНТРА МАСС

В любой системе частиц имеется одна замечательная точка $C$, называемая центром масс (или центром инерции), которая обладает рядом интересных свойств. Ее положение относительно начала $O$ данной системы отсчета характеризуется радиусом – вектором $\vec{r}_c$, определяемым как

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i ,$$

где $m_i$ и $\vec{r}_i$ – масса и радиус-вектор $i$-й частицы, $m$ – масса всей системы, $n$ – число частиц в системе.

Следует заметить, что центр масс системы совпадает с ее центром тяжести, впрочем, это утверждение справедливо лишь в том случае, когда поле сил тяжести в пределах данной системы можно считать однородным.

Найдем скорость $\vec{\upsilon}_c$ центра масс системы

$$\vec{\upsilon}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i .$$

Учитывая, что $\vec{P}_i = m_i \vec{\upsilon}_i$, а $\sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i$ – есть импульс $\vec{P}$ системы, можно написать

$$\vec{P} = m\vec{\upsilon}_c , \qquad (39)$$

то есть импульс системы равен произведению массы системы на скорость ее центра масс. Продифференцируем выражение (39) по времени:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = m\frac{d\vec{\upsilon}_c}{dt} .$$

По второму закону Ньютона $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$, отсюда получаем:

$$\vec{F} = m\vec{a}_c , \qquad (40)$$

где $\vec{a}_c$ – ускорение центра масс системы, $\vec{F}$ – геометрическая сумма внешних сил, приложенных к системе.

Это и есть уравнение движения центра масс системы: **центр масс системы частиц движется так, как двигалась бы материальная точка, в которой сосредоточена масса всей системы под действием всех приложенных к системе внешних сил.**

Пример. Человек прыгает с вышки в воду. Движение прыгуна в общем случае имеет весьма сложный характер. Однако если сопротивление воздуха пренебрежимо мало, то можно сразу утверждать, что центр масс прыгуна движется по параболе, как материальная точка, на которую действует постоянная сила $m\vec{g}$, где $m$ – масса человека.

Из уравнения (40) следует, что если внешние силы $\vec{F}=0$, то $\vec{a}_c=0$, то есть центр масс системы, либо движется равномерно и прямолинейно, либо остается неподвижным.

Уравнение (40) по форме совпадает с основным уравнением динамики материальной точки и является его обобщением на систему частиц.

## 6.4. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

Имеется много случаев, когда масса тела изменяется в процессе движения за счет непрерывного отделения или присоединения вещества (ракета, реактивный самолет, автомобиль для поливки улицы).

Наша задача: найти уравнение движения такого тела. Решение этого вопроса покажем на примере ракеты. Принцип действия ракеты состоит в следующем. Ракета с большой скоростью выбрасывает вещество (продукты сгорания), воздействуя на него с большой силой. Выбрасываемое вещество с такой же, но противоположно направленной силой в свою очередь действует на ракету и сообщает ей ускорение в противоположном направлении.

Пусть в момент времени $t$ масса ракеты $m$, а ее скорость $\vec{\upsilon}$. Спустя время $dt$ ее масса уменьшилась на $dm$ и стала равной $m-dm$, а скорость стала равной $\vec{\upsilon}+d\vec{\upsilon}$. Изменение импульса системы за время $dt$ равно:

$$d\vec{P}=\left[(m-dm)(\vec{\upsilon}+d\vec{\upsilon})+dm(\vec{\upsilon}+d\vec{\upsilon}+\vec{u})\right]-m\vec{\upsilon},$$

где $\vec{u}$ – скорость истечения газов относительно ракеты. Раскроем скобки в этом уравнении, получим:

$$d\vec{P}=md\vec{\upsilon}+\vec{u}dm.$$

Так как на ракету действуют внешние силы $\vec{F}$ (сила тяжести, сила сопротивления воздуха), то согласно (18)

$$\vec{F}dt=md\vec{\upsilon}+\vec{u}dm \quad \text{или} \quad m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\vec{F}-\vec{u}\frac{dm}{dt}.$$

Величина $-\vec{u}\dfrac{dm}{dt}=\vec{F}_P$ называется <u>реактивной силой.</u> Это сила, с которой действуют на ракету вылетающие газы.

Тогда $$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_P \qquad (41)$$

– уравнение движения тела с переменной массой (уравнение Мещерского).

Полученной формулой можно воспользоваться для расчета зависимости скорости ракеты от массы сгоревшего топлива. Будем считать, что внешние силы равны 0, то есть движение происходит только под действием реактивной силы:

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = -\vec{u}\frac{dm}{dt}.$$

Если ракета движется прямолинейно, то $\upsilon = -u\int\frac{dm}{m} = -u\ln m + C$.

Значение постоянной интегрирования $C$ определим из начальных условий. Пусть в начальный момент времени скорость ракеты равна 0, а масса равна $m_0$. Отсюда $C = u \ln m_0$. Следовательно,

$$\upsilon = u\ln\left( m_0 / m \right).$$

Это выражение называется формулой Циолковского. Она показывает, что при данной скорости истечения газов скорость ракеты определяется только отношением начальной массы $m_0$ ракеты к оставшейся массе $m$.

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. С каким фундаментальным свойством пространства связан закон сохранения импульса? В чем состоит это свойство?
2. Что называется механической системой?
3. Какая система называется замкнутой?
4. В чем заключается закон сохранения импульса?
5. Что называется центром масс системы частиц?
6. Как движется центр масс замкнутой системы?
7. Напишите и объясните уравнение движения тела переменной массы.

# Лекция 7

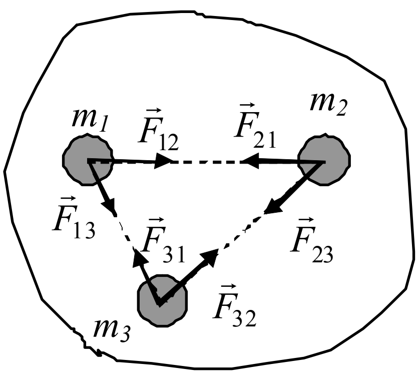
## ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В МЕХАНИКЕ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

Термины и понятия

Абсолютно неупругий удар
Абсолютно упругий удар
Беспорядочное (хаотическое) движение
Восстановить (восстанавливать)
Гантели
Детали процесса
Деформироваться
Догонять
Забить (гвоздь)
Закон сохранения механической энергии
Закон сохранения момента импульса
Ковка металла
Кратковременный
Кусок
Молот
Наковальня
Общефизический закон сохранения энергии
Приращение энергии
Скамья Жуковского
Соударение
Удар
Центральный удар шаров
Штамповка металла

### 7.1. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК (ТЕЛ)

При рассмотрении закона сохранения энергии материальной точки предполагалось, что материальная точка движется в стационарном силовом поле. Силовое поле, в котором движется материальная частица, возникает благодаря наличию других тел. Чтобы силовое поле было стационарным – не зависящем от времени, тела, создающие это поле должны быть неподвижны. Таким образом, рассмотренный закон сохранения полной механической энергии относится к случаю: одна материальная точка (тело) движется, а остальные – покоятся.




Сформулируем закон сохранения полной механической энергии в общем случае, когда имеется несколько движущихся материальных точек (тел) – система тел (материальных точек).

Рассмотрим **замкнутую систему** из

$n$ тел, между которыми действуют только консервативные силы.

Под действием этих сил тела внутри системы перемещаются, меняется их скорость и положение, то есть меняются кинетическая и потенциальная энергии каждого тела и системы в целом.

Запишем второй закон Ньютона для каждого тела:

$$m_1 \frac{d\vec{\upsilon}_1}{dt} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \ldots\ldots + \vec{F}_{1n},$$

$$m_2 \frac{d\vec{\upsilon}_2}{dt} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \ldots\ldots + \vec{F}_{2n},$$

$$-----------------------$$

$$m_n \frac{d\vec{\upsilon}_n}{dt} = \vec{F}_{n1} + \vec{F}_{n2} + \ldots\ldots + \vec{F}_{n,n-1}.$$

Под действием сил тела системы совершают перемещения $d\vec{r}_1, d\vec{r}_2 \ldots\ldots d\vec{r}_n$. Умножим каждое уравнение на соответствующее перемещение. Учитывая, что $d\vec{r}_i = \vec{\upsilon}_i dt$, получим:

$$m_1\left(\vec{\upsilon}_1\, d\vec{\upsilon}_1\right) = (\vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \ldots\ldots + \vec{F}_{1n})d\vec{r}_1,$$

$$m_2\;\left(\vec{\upsilon}_2\;d\vec{\upsilon}_2\right) = \left(\vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \ldots\ldots + \vec{F}_{2n}\right)d\vec{r}_2,$$

$$-----------------------------$$

$$m_n\left(\vec{\upsilon}_n\;d\vec{\upsilon}_n\right) = \left(\vec{F}_{n1} + \vec{F}_{n2} + \ldots\ldots + \vec{F}_{n,n-1}\right)d\vec{r}_n.$$

Сложив эти уравнения, получим:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\vec{\upsilon}_i d\vec{\upsilon}_i\right) - \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}_{i1} + \vec{F}_{i2} + \ldots\ldots + \vec{F}_{in}\right)d\vec{r}_i = 0,$$

или

$$\sum_{i=1}^{n} d\left(\frac{m_i \upsilon_i^2}{2}\right) - \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}_{i1} + \vec{F}_{i2} + \ldots\ldots + \vec{F}_{in}\right)d\vec{r}_i = 0.$$

Первый член левой части равенства

$$\sum_{i=1}^{n} d\left(\frac{m_i \upsilon_i^2}{2}\right) = dE_k,$$

где $dE_k$ – приращение кинетической энергии системы. Второй член $\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}_{i1} + \vec{F}_{i2} + \ldots\ldots + \vec{F}_{in}\right)d\vec{r}_i$ – элементарная работа, совершенная телами системы. Так как для каждой материальной точки системы $dA_i = -dE_{\Pi i}$, то $\sum_{i=1}^{n} dA_i = -\sum_{i=1}^{n} dE_{\Pi i} = -dE_{\Pi}$, где $dE_{\Pi}$ – приращение потенциальной энергии системы материальных точек, то:

$$d\left(E_k + E_П\right) = 0,$$

откуда
$$E_k + E_П = const. \qquad (42)$$

Выражение (42) представляет собой закон сохранения механической энергии: **полная механическая энергия замкнутой системы, в которой действуют только консервативные силы, сохраняется, то есть не изменяется со временем.** Может происходить лишь превращение кинетической энергии в потенциальную и обратно, причем приращение одной из них в точности равно убыли другой.

Сформулируем **закон изменения полной механической энергии системы.** Пусть система материальных точек (тел) не является замкнутой. На материальные точки кроме внутренних консервативных сил, действуют любые другие силы, которые будем называть сторонними. Отнесем к сторонним силам все внешние силы (силы со стороны тел не входящих в систему), а также все диссипативные силы (силы трения, силы сопротивления), как внутренние, так и внешние. Таким образом, сторонними силами будем называть все силы, кроме внутренних консервативных сил.

Если система материальных точек перешла из произвольного начального положения 1 в произвольное конечное положение 2, то согласно теореме о кинетической энергии, работа всех приложенных к материальным точкам сил равна приращению их кинетических энергий. И следовательно, работа всех сил действующих на систему и внутри системы равна приращению кинетической энергии системы материальных точек: $A_{1-2} = E_{K2} - E_{K1}$, где $E_{K2}$ и $E_{K1}$ – кинетическая энергия системы материальных точек в конечном и начальном состоянии соответственно.

Представим работу $A_{1-2}$ как сумму работы $A_{1-2конс}$ консервативных внутренних сил и работы $A_{1-2стор}$ всех сторонних сил: $A_{1-2} = A_{1-2конс} + A_{1-2стор}$. Учтем свойство потенциальной энергии системы, согласно которому работа консервативных сил равна убыли потенциальной энергии: $A_{1-2конс} = E_{П1} - E_{П2}$.

Так как $A_{1-2} = E_{K2} - E_{K1}$, с другой стороны $A_{1-2} = A_{1-2конс} + A_{1-2стор}$, то $A_{1-2} = E_{П1} - E_{П2} + A_{1-2стор}$. Приравняв выражения, получим: $A_{1-2стор} = (E_{K2} + E_{П2}) - (E_{K1} + E_{П1}) = E_2 - E_1$, где $E_2$ и $E_1$ – полная механическая энергия системы материальных точек в положениях 2 и 1 соответственно.

Таким образом, **работа сторонних сил $A_{1-2стор}$ при переходе системы материальных точек (тел) из произвольного начального положения в произвольное конечное положение равна приращению полной механической энергии системы:** $A_{1-2стор} = E_2 - E_1$.

Если в замкнутой системе кроме консервативных сил действуют еще диссипативные силы, например, сила трения, то полная механическая энергия не сохраняется (часть механической энергии превращается в тепло). В этом случае выполняется общефизический закон сохранения энергии: **энергия никогда не создается и не уничтожается, она может только переходить из одной формы в другую.**

С помощью законов сохранения импульса и энергии исследуем движение сталкивающихся тел.

## 7.2. УДАР

Ударом называется любое кратковременное взаимодействие тел, результатом которого является значительное изменение скорости их движения.

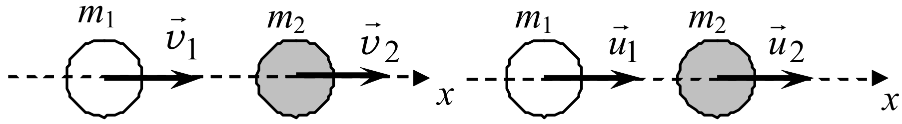
С ударом мы встречаемся не только в макромире (т.е. мире больших тел), но и в мире атомных, ядерных и элементарных частиц.

Движение сталкивающихся тел (как и всякая другая задача о движении тел) может быть исследовано с помощью законов Ньютона. Однако для этого нужно было бы знать, какие силы возникают при соприкосновении тел и как они изменяются в процессе соударения. Но если нас интересуют не детали процесса соударения, а лишь конечный результат его, то такое полное исследование с помощью законов Ньютона становится ненужным. Так как два сталкивающихся тела, на которые не действуют силы со стороны других тел, представляют собой замкнутую систему, то к ним применим закон сохранения импульса, а во многих случаях – и закон сохранения энергии. Зная движение тел до столкновения, и применяя законы сохранения, можно определить движение тел после столкновения. Моделью для подобных задач может служить задача о соударении шаров. Будем рассматривать центральный удар шаров – это удар, при котором центры масс шаров лежат на одной прямой. При этом шары могут двигаться навстречу друг другу или первый шар может догонять второй.

Различают абсолютно упругий и абсолютно неупругий удары.

## 7.3. АБСОЛЮТНО УПРУГИЙ УДАР

Абсолютно упругий удар – это удар, при котором механическая энергия системы соударяющихся тел не превращается в другие виды энергии.




**до удара** **после удара**

Пусть оба шара движутся вдоль оси $x$. Скорости шаров с массами $m_1$ и $m_2$ до удара $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, после удара $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$.

Проекции векторов скорости на ось $x$ равны модулям скоростей. В момент удара шары деформируются (сжимаются). В обоих шарах возникают упругие силы, которые стремятся восстановить форму шара. Эти силы замедляют движение первого шара и ускоряют движение второго. Так как удар абсолютно упругий, шары полностью восстанавливают свою форму, затем расходятся и движутся уже со скоростями, отличными от скоростей до удара. При соударении в телах возникают столь значительные силы, что внешними силами, действующими на них, можно пренебречь и считать, что шары образуют замкнутую систему. Применим к шарам закон сохранения энергии и закон сохранения импульса.

По закону сохранения кинетической энергии

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}. \qquad (43)$$

Закон сохранения импульса (в проекциях на ось $x$):

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2. \qquad (44)$$

Переносим в обоих равенствах члены с $m_1$ влево, с $m_2$ – вправо:

$$m_1 v_1^2 - m_1 u_1^2 = m_2 u_2^2 - m_2 v_2^2,$$

$$m_1 v_1 - m_1 u_1 = m_2 u_2 - m_2 v_2, \qquad (45)$$

откуда

$$v_1 + u_1 = u_2 + v_2. \qquad (46)$$

Решая совместно (45) и (46), находим скорости шаров после удара:

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2) v_1 + 2 m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \qquad (47)$$

$$u_2 = \frac{\left(m_2 - m_1\right)\ \upsilon_2 + 2m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2}. \qquad (48)$$

Проанализируем результат. Рассмотрим частные случаи.

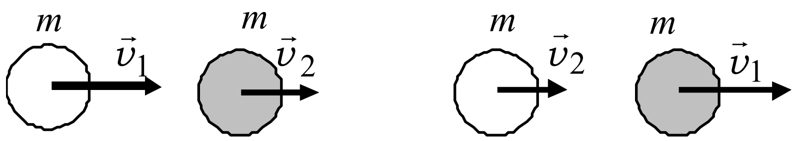
1. Соударения одинаковых шаров:

$$m_1 = m_2.$$

Выражения (47) и (48) имеют вид:

$$u_1 = \upsilon_2, \quad u_2 = \upsilon_1,$$

то есть шары равной массы обмениваются скоростями.




**до удара** **после удара**

2. Один шар до удара покоится:

$$\upsilon_2 = 0$$

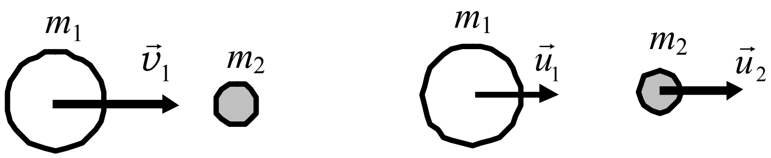
Выражения (47) и (48) имеют вид:

$$u_1 = \frac{\left(m_1 - m_2\right)\upsilon_1}{m_1 + m_2},$$

$$u_2 = \frac{2m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2}. \qquad (49)$$

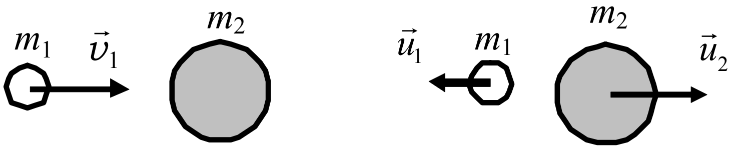
Поведение шаров зависит от соотношения масс:

а) $m_1 > m_2$. Первый шар продолжает двигаться в том же направлении, как и до удара, но с меньшей скоростью ($u_1 < \upsilon_1$). Второй шар начинает двигаться в том же направлении.




**до удара** **после удара**

б) $m_1 < m_2$. После удара направление движения первого шара изменится – шар отскакивает обратно. Второй шар движется в ту сторону, в которую двигался первый шар до удара.




**до удара** **после удара**

Чем больше разница в массах, тем меньшую энергию передает малый шар большому. При $m_1 << m_2$ $u_2 = 0$. Например, при абсолютно упругом ударе электрона с атомом электрон полностью сохраняет кинетическую энергию.

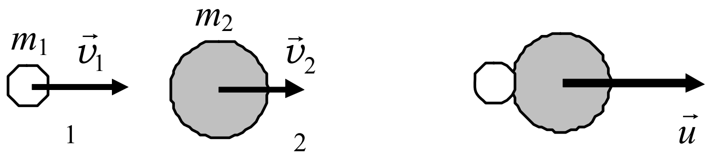
в) $m_1 = m_2$. После удара остановится первый шар, а второй будет двигаться с той же скоростью и в том же направлении, в котором двигался первый шар до удара.


**до удара** **после удара**

Таким образом, при абсолютно упругом ударе общая кинетическая энергия тел сохраняется, но распределяется между ними в зависимости от их масс и скоростей.

## 7.4. АБСОЛЮТНО НЕУПРУГИЙ УДАР

Абсолютно неупругий удар – это удар, при котором часть механической энергии системы соударяющихся тел превращается в другие виды энергии.




**до удара** **после удара**

Имеем шары массами $m_1$ и $m_2$, их скорости соответственно равны $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$. В момент удара шары деформируются, но эта деформация не исчезает и шары после удара двигаются с одинаковой скоростью.

Найдем скорость шаров после удара. Закон сохранения импульса можно записать в проекции на направление движения:

$$m_1 \upsilon_1 + m_2 \upsilon_2 = (m_1 + m_2) u,$$

где $u$ – скорость шаров после удара. Тогда

$$u = \frac{m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}. \qquad (50)$$

Закон сохранения кинетической энергии при абсолютно неупругом ударе не выполняется. Часть кинетической энергии расходуется на работу деформации. Эту «потерю» можно определить по разности кинетической энергии тел до и после удара.

$$\Delta E_k = \left( \frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2^2}{2} \right) - \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2}.$$

Используя (50), получим:

$$\Delta E_k = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (\upsilon_1 - \upsilon_2)^2. \qquad (51)$$

Эта часть кинетической энергии превращается в тепловую энергию, т.е. в энергию беспорядочного хаотического движения молекул. На практике часто приходится иметь дело со случаем, когда одно из тел (ударяемое тело) неподвижно, то есть $\upsilon = 0$. В таком случае формула (51) имеет вид:

$$\Delta E_k = E_1 \frac{m_2}{m_1 + m_2},$$

где $E_1 = \dfrac{m_1\upsilon_1^2}{2}$ – кинетическая энергия ударяющегося тела.

Если целью удара является деформация тела (ковка, штамповка металла), необходимо, чтобы бóльшая часть энергии ударяющегося тела расходовалась на работу деформации, то есть $\Delta E_k$ была по возможности больше. Для этого надо брать $m_1 << m_2$ (при ковке масса наковальни с куском металла много больше, чем масса молота). Если в результате удара надо получить перемещение неподвижного тела (забивание гвоздя), надо, чтобы потеря энергии на деформацию была наименьшей. Поэтому масса молотка должна быть, гораздо больше массы гвоздя.

## 7.5. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА

Как указывалось ранее, при описании динамики вращательного движения момент импульса играет ту же роль, что и импульс при поступательном движении. Момент импульса твердого тела определяется моментом инерции тела относительно оси вращения и угловой скоростью вращения твердого тела: $\vec{L} = I\vec{\omega}$.

Продифференцируем уравнение это по времени:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\varepsilon} = \vec{M}, \quad \text{или} \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \qquad (52)$$

Это уравнение называется уравнением моментов. Из уравнения следует, что причиной изменения момента импульса является момент силы, действующий на твердое тело. Динамика вращательного движения описывается именно этим уравнением. Обратите внимание на аналогичность динамического содержания и структуры уравнения моментов $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ и второго закона Ньютона $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$.

В уравнении моментов речь идет о приращении моментов импульса, во втором законе Ньютона – о приращении импульса. Причиной приращения момента импульса является момент силы, а причиной приращения импульса является сила.

Из уравнения моментов следует, что под действием момента силы $\vec{M}$ твердое тело за элементарный промежуток времени $dt$ получает элементарное приращение момента импульса: $d\vec{L} = \vec{M} \cdot dt$. За конечный промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ момент импульса твердого тела получает конечное приращение, которое можно определить: $\vec{L}_2 - \vec{L}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M} \cdot dt$. Уравнения $d\vec{L} = \vec{M} \cdot dt$ и $\vec{L}_2 - \vec{L}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M} \cdot dt$ называются теоремами об изменении момента импульса в дифференциальной и интегральной форме соответственно.

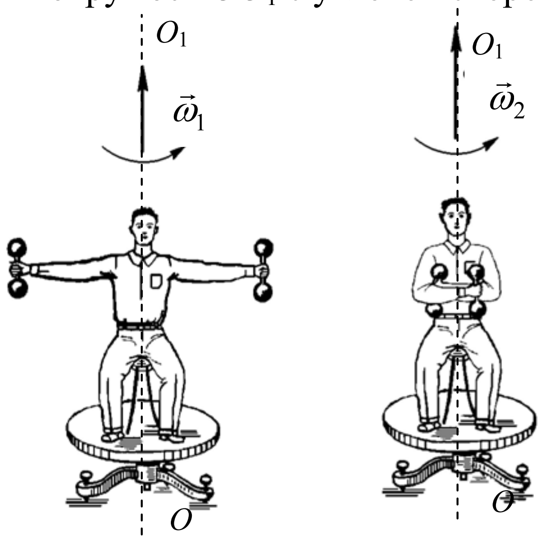
Из теоремы об изменении момента импульса следует закон сохранения момента импульса твердого тела: **если момент внешних сил относительно некоторой оси равен нулю, то относительно этой оси момент импульса со временем не изменяется (сохраняется).**

Докажем это утверждение. Действительно, если момент внешних сил, действующих на твердое тело относительно некоторой оси равен нулю $\vec{M} = 0$, то изменение момента импульса относительно этой же оси равно нулю $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$,

откуда $$\vec{L} = const. \qquad (53)$$

Выражение (53) представляет собой <u>закон сохранения момента импульса</u>: **момент импульса замкнутой системы сохраняется, т.е. не изменяется с течением времени**.

Пример 1: рассмотрим случай вращательного движения человека, находящегося на скамье Жуковского. Скамья Жуковского представляет собой горизонтальную платформу (диск), которая может свободно вращаться без трения вокруг вертикальной оси $OO_1$. Человек сидит на скамье и держит в вытянутых руках гимнастические гантели и вращается вместе со скамьей вокруг оси $OO_1$ с угловой скоростью $\omega_1$.



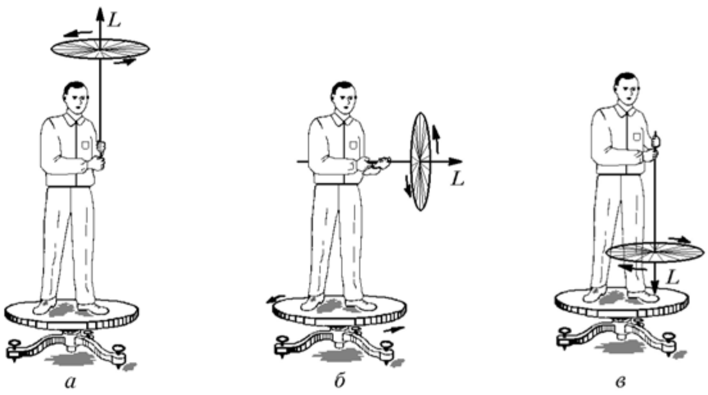

Если человек прижмет гантели к себе, то момент инерции системы уменьшится. Поскольку момент внешних сил (сил тяжести и реакции подшипников) относительно оси $OO_1$ равен нулю, то момент импульса системы относительно оси $OO_1$ сохраняется: $(I_0 + 2mr_1^2)\omega_1 = (I_0 + 2mr_2^2)\omega_2$,

где $I_0$ – момент инерции человека и скамьи относительно оси $OO_1$, $2mr_1^2$ и $2mr_2^2$ – моменты инерции гантелей в первом и втором положениях относительно оси $OO_1$, $m$ – масса одной гантели, $r_1$ и $r_2$ – расстояния от гантелей до оси вращения, $\omega_1$ и $\omega_2$ – угловые скорости вращения системы. Очевидно, что если $r_2 < r_1$, то $\omega_2$ возрастает.

Пример 2: человек стоит на неподвижной скамье Жуковского и держит в руках ось массивного колеса так, что она является продолжением оси $OO_1$ вращения скамьи.


Вначале колесо не вращается, а затем человек раскручивает его до угловой скорости $\vec{\omega}_1$. При этом он сам вместе со скамьей приходит во вращение в обратном направлении с угловой скоростью $\vec{\omega}_2$, которая, как показывает опыт, находится в полном согласии с законом сохранения момента импульса системы относительно неподвижной оси $OO_1$: $\vec{L} = const$. Вначале скамья не вращается, поэтому суммарный момент импульса системы равен нулю $\vec{L} = 0$, после того как колесо раскрутили суммарный момент импульса системы равен сумме моментов импульса колеса и скамьи: $\vec{L} = \vec{L}_K + \vec{L}_{CK} = I_K \vec{\omega}_1 + I_{CK} \vec{\omega}_2 = 0$. Из этого уравнения следует, что $\vec{\omega}_2 = -\dfrac{I_K}{I_{CK}} \vec{\omega}_1$. Скамья вращается в противоположном направлении вращению колеса.

Пример 3. Рассмотрите внимательно рисунок и объясните явление.




## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В чем заключается закон сохранения механической энергии?
2. С каким фундаментальным свойством времени связан закон сохранения энергии? В чем состоит это свойство?
3. Чем отличается абсолютно упругий удар от абсолютно неупругого удара?
4. Запишите законы сохранения для абсолютно упругого и абсолютно неупругого ударов.
5. Сформулируйте закон сохранения момента импульса. Приведите пример.
6. С каким фундаментальным свойством пространства связан закон сохранения момента импульса? В чем состоит это свойство?

## Лекция 8

# ВСЕМИРНОЕ ТЯГОТЕНИЕ.

# ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Термины и понятия

Первая космическая скорость
Вторая космическая скорость
Третья космическая скорость
Вес тела
Гелиоцентрическая система
Гравитационная постоянная
Закон всемирного тяготения
Законы движения планет
Конечные размеры тел
Крутильные весы
Напряженность гравитационного поля
Период обращения планет (вокруг Солнца)
Поле тяготения
Полуось
Потенциал поля тяготения
Размерность чего?
Сила тяжести
Силовая характеристика
Состояние невесомости
Суточное вращение
Точечная масса
Угол закручивания
Шкала
Экспериментальная установка

## 8.1. ЗАКОНЫ КЕПЛЕРА. ЗАКОН ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ

К началу XVII столетия большинство ученых окончательно убедилось в справедливости гелиоцентрической системы мира. Согласно этой системе, предложенной Николаем Коперником, Земля и все остальные планеты движутся вокруг Солнца, которое является центром нашей планетарной системы. Иоган Кеплер, обработав результаты многочисленных наблюдений, проведенных Тихо Браге и им самим, получил законы движения планет вокруг Солнца:

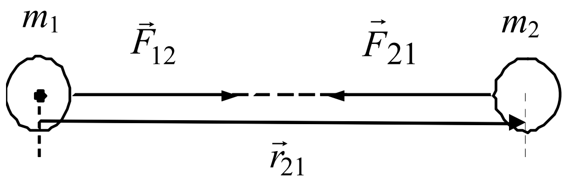
1. Каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.
2. Радиус – вектор планеты за равные промежутки времени описывает одинаковые площади.
3. Квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей их орбит.

Для объяснения этих законов нужно было найти силы, которые действуют на планеты. Однако ни Кеплеру, ни его современникам не удалось это сделать.

Впоследствии И. Ньютон на основании законов Кеплера и основных законов динамики открыл всеобщий закон всемирного тяготения. Согласно этому закону сила, с которой две материальные точки притягивают друг друга, пропорциональна массам этих точек и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними:

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}. \qquad (54)$$

Здесь $\gamma$ – коэффициент пропорциональности, называемый гравитационной постоянной. Направлена сила вдоль прямой, проходящей через взаимодействующие материальные точки. Сила действующая на тело массой $m_2$ со стороны тела массой $m_1$ направление против радиус – вектора $\vec{r}$, определяющего положение тела 2 относительно тела 1, поэтому

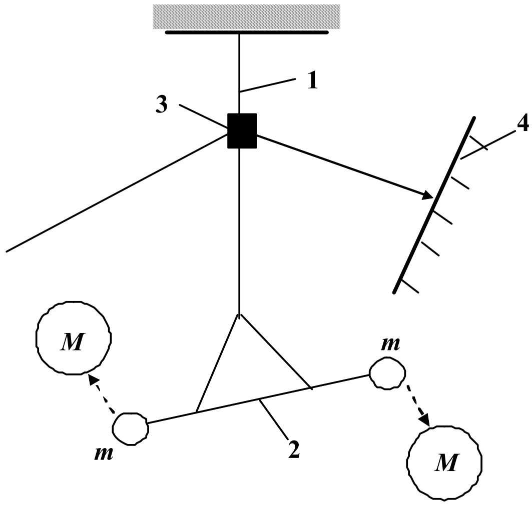



$$\vec{F}_{21} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{r}_{21}.$$

Силы тяготения являются силами притяжения. Закон всемирного тяготения установлен для тел, принимаемых за материальные точки, то есть для таких тел, размеры которых малы по сравнению с расстояниями между ними. Для определения силы взаимодействия тел конечных размеров нужно решить сложную математическую задачу: разбить эти тела на точечные массы, подсчитать по формуле (54) силы притяжения между всеми попарно взятыми массами. Затем геометрически их сложить (проинтегрировать).

Точный расчет показывает, что формулой (54) можно пользоваться и для расчета силы взаимодействия между однородными шарами с массами $m_1$ и $m_2$, понимая под $r$ – расстояние между центрами шаров.

Необходимо отметить следующее. Масса фигурирует в двух различных законах: во втором законе Ньютона и в законе всемирного тяготения. В первом случае она характеризует инертные свойства тела, во втором – гравитационные свойства, т.е. способность тел притягивать друг друга. В связи с этим возникает вопрос: не следует ли различать инертную и гравитационную массы? В настоящее время можно считать доказанным, что инертная и гравитационная массы равны друг другу.




## 8.2. ОПЫТ КАВЕНДИША

Английский физик Кавендиш поставил опыт, позволивший измерить силу тяготения в лабораторных условиях и тем самым определить гравитационную постоянную. В качестве экспериментальной установки использовались крутильные весы, принцип устройства которых показан на рисунке.

На тонкой нити (**1**) подвешен легкий стержень (**2**), а на нити жестко закреплено небольшое зеркальце (**3**). Луч света, падая на зеркальце, отражается от него и попадает на шкалу (**4**). При повороте стержня отраженный луч перемещается по шкале, регистрируя тем самым угол закручивания нити. На концах стержня закреплены два свинцовых шарика с массами $m$ каждый. К ним подносят два симметрично расположенных свинцовых шара с массами $M$. В результате взаимодействия, нить закручивается на некоторый угол до тех пор, пока сила упругости деформированной нити не уравновешивает силу гравитационного взаимодействия между шарами. Измерив силу взаимодействия по углу закручивания нити, зная массы шаров и расстояния между их центрами, можно определить гравитационную постоянную.

Значения $\gamma$ принимается равным $6{,}67 \cdot 10^{-11} Н \cdot м^2 / кг^2$. С такой силой притягиваются друг к другу два тела массой по 1 *кг*, находящиеся на расстоянии 1 *м* друг от друга.

## 8.3. ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ. НАПРЯЖЕННОСТЬ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

Механизм гравитационного взаимодействия представляется следующим образом. Каждое тело массы $M$ создает вокруг себя поле. Если в некоторую точку этого поля поместить тело массы $m$, то поле действует на это тело с некоторой силой $F$.

Гравитационное поле материально. Оно существует независимо от нашего сознания и его можно обнаружить по его воздействию на физические объекты, например на измерительные приборы. Гравитационное поле является одним из видов материи.

Для количественной характеристики поля тяготения вводится физическая величина, называемая напряженностью гравитационного поля. **Напряженность поля численно равна отношению силы тяготения, действующей на тело, к массе этого тела:**

$$\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m},$$

напряженность определяется силой, действующей со стороны поля на материальную точку единичной массы.

Воспользовавшись законом тяготения (54) и положив в нем $m_1 = M$, $m_2 = m$, имеем

$$G = \gamma \frac{M}{r^2}$$

– напряженность поля, создаваемого материальной точкой массы $M$ на расстоянии $r$ от нее.

Напряженность поля является вектором, направленным в ту же сторону, что и сила тяготения.

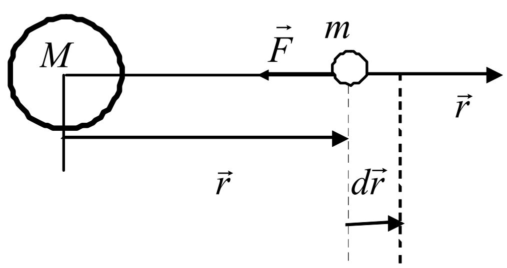
Напряженность есть силовая характеристика поля тяготения. Размерность $\vec{G}$ совпадает с размерностью ускорения. Поскольку напряженность поля не зависит от массы вносимого в него тела $m$, то все тела, независимо от их массы падают вблизи поверхности Земли с одинаковым ускорением $\vec{g}$.

## 8.4. РАБОТА В ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ. ПОТЕНЦИАЛ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

Вычислим работу, которую надо затратить для удаления тела массой $m$ от Земли. На расстоянии $r$ от Земли на тело действует сила.

$$dA = -\gamma \frac{Mm}{r^3}\left(\vec{r}d\vec{r}\right),$$

где $M$ – масса Земли. При перемещении тела на расстояние $dr$ совершается работа




$$dA = -\gamma \frac{Mm}{r^2} dr.$$

Знак « – » появляется потому, что сила и перемещение направлены противоположно. При перемещении тела на конечное расстояние работа равна:

$$A=\int_{r_1}^{r_2} dA=-\int_{r_1}^{r_2}\gamma\frac{Mm}{r^2}dr=m\left(\frac{\gamma M}{r_2}-\frac{\gamma M}{r_1}\right). \qquad (55)$$

Из полученной формулы видно, что работа в поле тяготения не зависит от траектории, а определяется лишь начальным и конечным перемещением тела, то есть <u>силы тяготения – консервативные силы.</u>

Согласно формуле (28) работа, совершаемая консервативными силами, равна изменению потенциальной энергии системы, взятому с обратным знаком.

$$A=-\left(E_{П_2}-E_{П_1}\right)=E_{П_1}-E_{П_2}.$$

Из сравнения последнего выражения с формулой (55) получаем

$$E_{П_1}-E_{П_2}=-m\left(\frac{\gamma M}{r_1}-\frac{\gamma M}{r_2}\right). \qquad (56)$$

Если принять потенциальную энергию при $r_2\to\infty$ равной нулю, то (56) запишется в виде:

$$E_{П_1}=-\frac{\gamma Mm}{r_1}.$$

Так как первая точка была выбрана произвольно, то потенциальная энергия тела массы $m$ в поле тяготения тела массой $M$ равна

$$E_П=-\frac{\gamma Mm}{r}.$$

<u>Потенциалом поля тяготения</u> называется скалярная величина

$$\varphi=\frac{E_П}{m},$$

равная потенциальной энергии, которой обладает тело единичной массы в данной точке поля. Потенциальная энергия равна работе поля по перемещению единичной массы из данной точки поля в бесконечность.

Итак, потенциал поля тяготения, создаваемого телом $M$, равен

$$\varphi=-\gamma\frac{M}{r},$$

где $r$ – расстояние от этого тела до рассматриваемой точки. **Потенциал – энергетическая характеристика поля тяготения.**

## 8.5. ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ ЗЕМЛИ

Под действием силы притяжения к Земле все тела падают с одинаковым ускорением, которое принято обозначать буквой $\vec{g}$. Это означает, что в системе отсчета, связанной с Землей, на всякое тело массой $m$ действует сила

$$\vec{P} = m\vec{g},$$

называемая <u>силой тяжести.</u>

Вследствие вращения Земли вокруг собственной оси сила тяжести несколько отличается от силы тяготения. Если пренебречь суточным вращением Земли, то сила тяжести и сила гравитационного притяжения равны между собой:

$$mg = \gamma \frac{Mm}{R_0^2}, \tag{57}$$

где $M$ – масса Земли, $R_0$ – радиус Земли. Эта формула верна для случая, когда тело находится вблизи поверхности Земли.

Если тело расположено на высоте $h$ от поверхности Земли, тогда

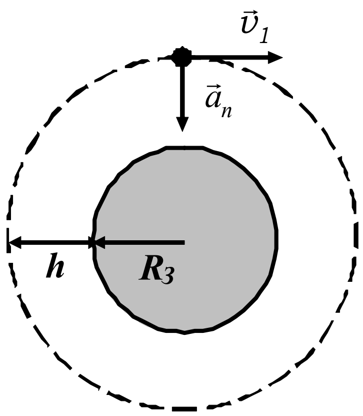
$$mg = \gamma \frac{Mm}{(R_0 + h)^2},$$

то есть сила тяжести, и ускорение свободного падения с удалением от поверхности Земли уменьшаются.

Следует различать силу тяжести и <u>вес тела.</u> Весом тела называют силу, с которой тело, вследствии притяжения к Земле действует на опору (или подвес). Эта сила равна $m\vec{g}$ лишь в том случае, если тело и опора (подвес) неподвижны относительно Земли. В случае их движения с некоторым ускорением $\vec{a}$ вес не будет равен силе тяжести.

Состояние тела, при котором вес тела равен $O$, называется состоянием <u>невесомости</u>. Например, невесомыми являются тела, находящиеся в космических кораблях, которые свободно движутся в космосе.

## 8.6. КОСМИЧЕСКИЕ СКОРОСТИ




<u>Первой космической скоростью</u> $\upsilon_1$ называется такая скорость, которую надо сообщить телу, чтобы оно могло двигаться вблизи поверхности Земли по круговой орбите, т.е. превратиться в искусственный спутник Земли.

Сила тяготения, действующая на спутник, сообщает ему нормальное ускорение $\vec{F}_m = m\vec{a}_n$, $a_n = \dfrac{\upsilon_1^2}{r}$, где $r$ – радиус орбиты спутника. По второму закону Ньютона:

$$\gamma\frac{Mm}{r^2}=\frac{m\upsilon_1^2}{r}, \text{ или } \quad \gamma\frac{mM}{(R_З+h)^2}=\frac{m\upsilon_1^2}{R_З+h}.$$

Учитываем, что спутник движется вблизи поверхности Земли, то $r\approx R_З$ (радиус Земли)

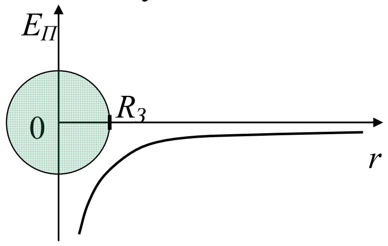
$$\gamma\frac{mM}{(R_З+h)^2}=\frac{m\upsilon_1^2}{R_З+h};\quad h<<R_З\Rightarrow\gamma\frac{M}{R_З}=\upsilon_1^2.$$

Принимая во внимание формулу $F_m=gm=\gamma\frac{mM}{R_З^2}$, получим

$$\upsilon_1=\sqrt{gR_З}=7{,}9\text{ км/с}.$$

Этой скорости недостаточно, чтобы тело могло выйти из сферы земного притяжения.

<u>Второй космической скоростью</u> $\upsilon_2$ называется такая скорость, которую надо сообщить телу, чтобы оно могло преодолеть притяжение Земли и уйти в космическое пространство.




Потенциальная энергия на большом расстоянии от Земли стремится к 0.
Кинетическая энергия должна быть равна работе ($\Delta E_К$), совершаемой против сил тяготения.

Эту скорость найдем из равенства кинетической энергии тела работе, совершаемой против сил тяготения:

$$\frac{m\upsilon_2^2}{2}=\int_{R_з}^{\infty}\gamma\frac{mM_з}{r^2}dr=\gamma\frac{mM_з}{R_з}, \text{ или}$$

$$\frac{m\upsilon_2^2}{2}=\gamma\frac{mM_З}{R_З}\Rightarrow\upsilon_2=\sqrt{2\underbrace{\gamma\frac{M_З}{R_З^2}}_{g}\cdot R_З}=\sqrt{2gR_З}=11{,}2\frac{\text{км}}{\text{с}},$$

откуда $\qquad \upsilon_2=\sqrt{2gR_з}=11{,}2$ км/с.

<u>Третьей космической скоростью</u> $\upsilon_3$ называется скорость, которую необходимо сообщить телу на Земле, чтобы оно могло преодолеть притяжение Солнца и покинуло пределы Солнечной системы. Третья космическая скорость $\upsilon_3=16{,}7\text{ км/с}$.

Впервые космические скорости были достигнуты в СССР: первая – при запуске первого искусственного спутника Земли в 1957 г., вторая –

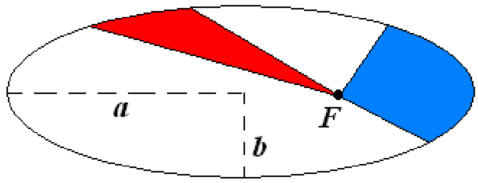
в 1959 г. при запуске ракеты, которая вышла из сферы земного притяжения и стала первой искусственной планетой нашей Солнечной системы. В 1961 г. Юрий Алексеевич Гагарин совершил полет вокруг Земли и благополучно приземлился.

## ЗАКОНЫ КЕПЛЕРА. ЗАКОНЫ ДВИЖЕНИЯ ПЛАНЕТ

Законы Кеплера описывают движение тел в центральном поле, каковым является поле тяготения. Кеплер (1571 – 1630 гг.) уточнил результаты наблюдений датского астронома Браге (1546 – 1601 гг.) и сформулировал законы движения планет Солнечной системы.

**Первый закон.** Планеты Солнечной системы вращаются по эллипсам, в одном из фокусов которых находится Солнце.

**Второй закон.** Радиус-вектор планет, определяющий её положение относительно Солнца, за равные промежутки времени описывает одинаковые площади.




**Третий закон.** Квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей их орбит.

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}.$$

Для круговых орбит $a = R$.

Законы Кеплера являются следствием законов Ньютона.

Например, третий закон Кеплера. Для частного случая движения планет по круговой орбите. Планеты движутся вокруг Солнца, следовательно, сила гравитационного взаимодействия планеты массой $m_1$ и Солнца равна по второму закону Ньютона: $\gamma \frac{m_1 M_c}{R_1^2} = \frac{m_1 \upsilon_1^2}{R_1} = m_1 \omega_1^2 R_1^2 = \frac{4\pi^2}{T_1^2} R_1^2.$

Для сравнения периодов обращения планет вокруг Солнца запишем это выражение для двух планет массами $m_1$ и $m_2$:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Для планеты 1: масса Солнца } M_c = \dfrac{4\pi^2 R_1^3}{\gamma T_1^2} \\[2ex] \text{Для планеты 2: масса Солнца } M_c = \dfrac{4\pi^2 R_2^3}{\gamma T_2^2} \end{array}\right\} \quad \frac{R_1^3}{T_1^2} = \frac{R_2^3}{T_2^2} \Rightarrow \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{R_1^3}{R_2^3}.$$

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Сформулируйте закон всемирного тяготения.
2. Что такое все тела и в чем состоит его отличие от силы тяжести?
3. Что такое напряженность поля тяготения?
4. Почему тяжелое тело не падает быстрее легкого?
5. Что такое первая, вторая и третья космические скорости?
6. Как вычисляются первая и вторая космические скорости?

### Слова и выражения

Благополучно
В связи *с чем*
Вблизи
Вносимый *куда?*
Впоследствии
Вследствие *чего?*
До тех пор, пока
Жестко
Закрепить
Космос
Луч (света)
Материально
Многочисленный
На основании *чего*
Независимо *от чего?*
Окончательно
Опыт
Орбита
Остальной
Отработать
Отраженный
Отразить
Под действием чего?
Подвешен, -а, -о, -ы
Подсчитать
Полет
Понимать *что? под чем?*
Попарно
Предложенный
Предложить
Приземлиться
Принято
Притягивать
Провести наблюдения
Произвольно
Промежуток времени
Пропорционально
Различать
Следует *что делать?*
Современник
Сознание
Справедливость
Спутник
Столетие
Сфера
Убедиться
Удастся
Устройство
Фигурировать
Эксперимент
Эллипс

# Лекция 9

# СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Термины и понятия

| | |
|---|---|
| Предельная скорость | Электромагнитная волна |
| Принцип относительности | Эфир |

## КИНЕМАТИКА СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

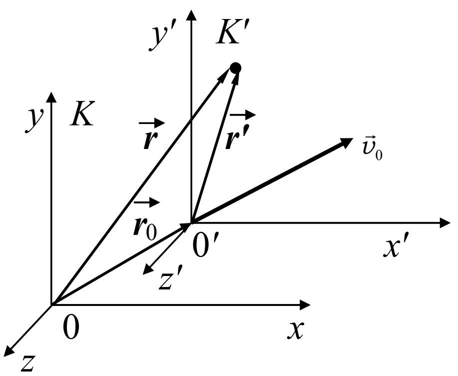
### 9.1. ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ ГАЛИЛЕЯ

Согласно принципу относительности, сформулированному Галилеем в 1636 г., **все инерциальные системы отсчета по своим механическим свойствам эквивалентны друг другу.** Во всех инерциальных системах отсчета свойства пространства и времени одинаковы, а законы механики имеют одинаковую математическую форму выражения. В соответствии с этим принципом, никакими механическими опытами, проводимыми в какой-либо инерциальной системе отсчета, нельзя установить, покоится данная система или движется равномерно и прямолинейно.

Классический принцип относительности справедлив для классической механики, при скоростях движения тел малых по сравнению со скоростью света, то есть при $\upsilon \ll c$.

Преобразования координат Галилея – это формулы преобразования координат материальной точки и времени при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Пусть инерциальная система отсчета *K′ движется с постоянной скоростью* $\vec{\upsilon}_0$ относительно инерциальной системы отсчета *K*. Преобразования Галилея – это формулы, связывающие между собой координаты $x,y,z$ и $x',y',z'$ материальной точки и время $t$ и $t'$ в двух системах отсчета имеют вид:




$\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{r}'$.(1)

$\vec{r}$ – радиус-вектор материальной точки в системе *К*.

$\vec{r}'$ – радиус -вектор материальной точки в системе *К'*.

$\vec{r}_0$ – радиус -вектор начала координат системы *К'* в системе *К*.

В начальный момент времени ($t=0$) начала координат систем *К* и *К'* совпадают.

Система *К'* начинает двигаться относительно *К* в направлении, совпадающем с вектором $\vec{r}_0$ со скоростью $\vec{\upsilon}_0$.

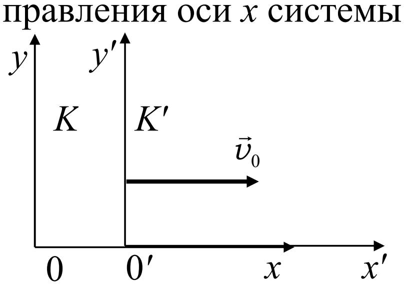
$$\vec{r}_0=\vec{\upsilon}_0 t. \quad (2)$$

$$\vec{r}=\vec{\upsilon}_0 t+\vec{r}'. \quad (3)$$

Уравнение (3) запишем в проекциях на оси координат:

$$\begin{aligned} x&=\upsilon_{0x}t+x', \\ y&=\upsilon_{0y}t+y', \quad (4) \\ z&=\upsilon_{0z}t+z'. \end{aligned}$$

В частном случае, когда *К'* движется с $\vec{\upsilon}_0$ вдоль положительного направления оси *x* системы *К*:




$$\begin{aligned} x&=\upsilon_{0x}t+x', \\ y&=y', \\ z&=z', \\ t&=t'. \end{aligned}$$

(5) – преобразования Галилея.

В классической механике считается, что ход времени не зависит от относительного движения систем отсчёта, следовательно, $t=t'$.

Из преобразований Галилея можно получить правило сложения скоростей в классической механике.

Продифференцируем уравнение (3) по времени:

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d(\vec{\upsilon}_0 t+\vec{r}')}{dt}=\vec{\upsilon}_0+\frac{d\vec{r}'}{dt}, \ (6), \quad dt=dt'.$$

$\vec{\upsilon}=\vec{\upsilon}_0+\vec{\upsilon}'$.(7) – теорема сложения скоростей Галилея.

$\vec{\upsilon}$ – скорость движения тела относительно *К* (абсолютная),

$\vec{\upsilon}'$ – скорость движения тела относительно $K'$ (относительная),

$\vec{\upsilon}_0$ – скорость движения системы $K'$ относительно $K$ (переносная).

Если $\vec{\upsilon} = const,\ \ \vec{\upsilon}_0 = const \Rightarrow \vec{\upsilon}' = \vec{\upsilon}_0 - \vec{\upsilon} = const \quad \Rightarrow F = 0,$ то есть, если в системе $K$ на материальную точку силы не действуют, то и в системе $K'$ на материальную точку силы не действуют. Если система отсчета движется с постоянной скоростью относительно инерциальной системы отсчёта, то она также является *инерциальной*.

Классический принцип относительности утверждает, что законы механики во всех инерциальных системах отсчета имеют одинаковую математическую форму выражения. Покажем, что второй закон Ньютона в системе $K$ и в системе $K'$ имеют одинаковую форму.

Продифференцируем уравнение (7) по времени:

$$\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{\upsilon}_0}{dt}}_{\substack{=0 \\ \vec{\upsilon}_0 = const}} + \underbrace{\frac{d\vec{\upsilon}'}{dt}}_{\frac{d\vec{\upsilon}'}{dt'}}. \quad (8) \qquad \Rightarrow \vec{a} = \vec{a}', \quad (9) \qquad m = const \quad \Rightarrow m\vec{a} = m\vec{a}'.$$

Ускорение движения материальной точки является инвариантным (не меняется) относительно инерциальной системы отсчёта. Следовательно, второй закон Ньютона (основное уравнение динамики) не меняет своего вида при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Таким образом, находясь в инерциальной системе отсчёта никакими механическими опытами нельзя обнаружить, движется система равномерно и прямолинейно или покоится.

## 9.2. ТРУДНОСТИ ДОРЕЛЯТИВИСТСКОЙ ФИЗИКИ. ОПЫТ МАЙКЕЛЬСОНА

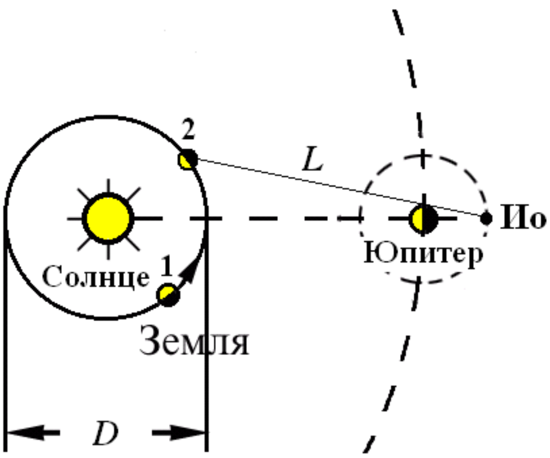
Представления классической механики Ньютона о свойствах пространства и времени подтвердились многочисленными экспериментами и долгое время ни у кого не вызывали сомнений. Заметим, впрочем, что эти эксперименты относились к изучению движения тел со скоростями значительно меньшими скорости света ($\upsilon << c$).

Первому испытанию подвергся принцип относительности Галилея, который, как известно, касался только механики – единственного раздела физики, достигшего к тому времени достаточного развития. По мере развития других разделов физики, в частности, оптики, возник естественный вопрос – распространяется ли принцип относительности Галилея и на немеханические явления? Можно ли с помощью немеханических явлений различать инерциальные системы отсчёта и выделить главную, абсолютную систему отсчёта?

Одно из таких явлений, с помощью которых пытались различить системы отсчёта – это распространение света. В конце XIX века уже было известно, что свет – это электромагнитная волна. Учёные полагали, что световые волны, подобно звуковым, должны распространяться в какой-то среде. Эта среда была названа эфиром. Считали, что эфир заполняет всё пространство и пронизывает все тела. Полагали, что эфир абсолютно неподвижен и не увлекается телами. Отсюда следовало, что эфир является абсолютной и неподвижной системой отсчёта.

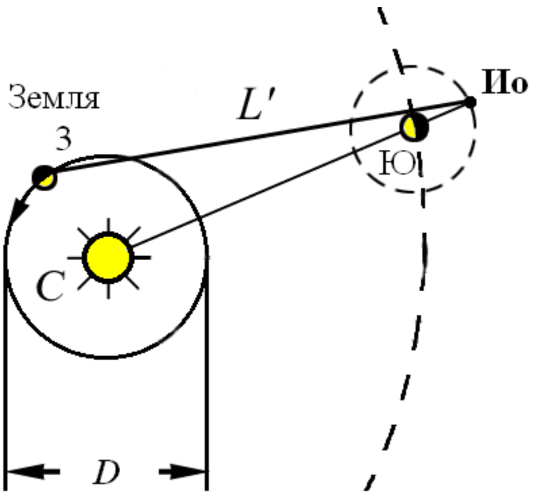
Фундаментальный интерес представляет вопрос о величине скорости света.

Впервые экспериментально определить скорость света удалось Рёмеру в 1676 г. Он обнаружил, что затмение Ио – крупнейшего спутника Юпитера совершается не совсем регулярно со временем (нарушается периодичность затмения).




При наблюдении затмения через 6 месяцев Земля находится в диаметрально расположенной точке своей орбиты вокруг Солнца, и свет должен пройти до Земли уже другой путь.

Затмение Юпитером своего спутника Ио происходит тогда, когда Юпитер находится между Солнцем и Ио. Земля в это время находится в точке 1. (Затмение происходит примерно через каждые 42 часа, в течение которых Ио совершает оборот вокруг Юпитера.)




На Земле затмение наблюдается через время $\Delta t = \dfrac{L}{c}$ после фактического затмения, когда Земля находится в точке 2.

Через 6 месяцев Земля в точке 3, путь, который должен пройти свет

$L' \approx L + D \Rightarrow$

$$\Delta t' = \frac{L'}{c} = \frac{L}{c} + \frac{D}{c} = \Delta t + \frac{D}{c} \Rightarrow \text{можно}$$

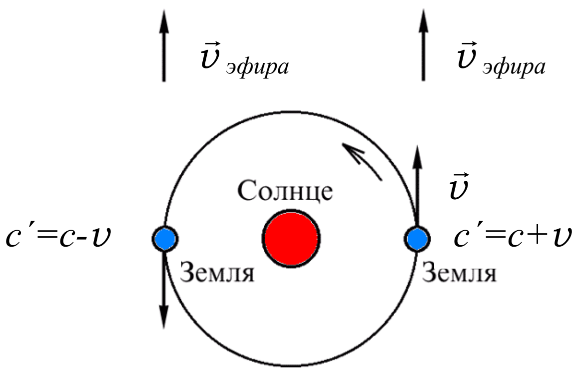
определить $c$.

Рёмер получил значение $c$ = 214300 *км/с*.

*Опыт Майкельсона–Морли* (Майкельсон в 1881 г., Морли –1887 г.).

До опубликования в 1905 г. Эйнштейном теории относительности считалось, что световые волны распространяются в особой среде – эфире, подобно тому, как звук распространяется в воздухе. Считалось, что только по отношению к покоящемуся эфиру скорость света равна $c$, а эфир является абсолютной и неподвижной системой отсчета. Учеными предпринимались неоднократные попытки обнаружить абсолютную инерциальную систему отсчета (мировой эфир) и найти абсолютную скорость движения этой системы.

Одна из попыток обнаружения абсолютной неподвижной системы отсчета принадлежит Майкельсону. Идея опыта Майкельсона-Морли. Наблюдатель, находящийся на Земле движется вместе с ней вокруг Солнца со скоростью $\vec{v}$ относительно мирового эфира. Если эфир может двигаться со скоростью $\vec{v}_{эфира}$ – эфирный ветер.

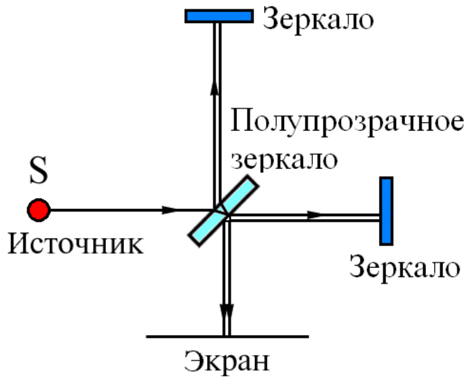


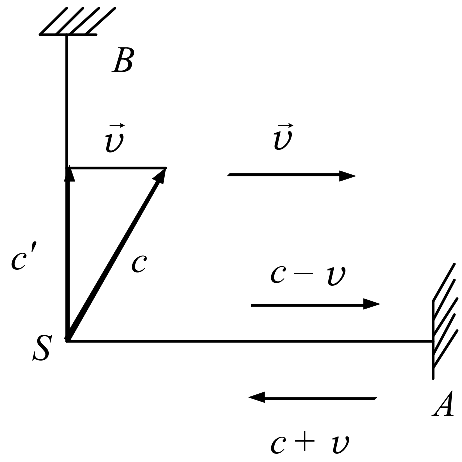

Скорость распространения света относительно неподвижного эфира

$$\vec{c}' = \vec{c} + \vec{v}.$$

Если исследовать явление распространения света от источника к приемнику, то время распространения света от источника до приёмника будет зависеть от ориентации векторов $\vec{c}$ и $\vec{v}$ относительно вектора $\vec{v}_{эфира}$.

Это предположение было проверено в 1881 году американским физиком А. Майкельсоном. Цель опыта Майкельсона – обнаружить движение Земли относительно эфира. Для измерения разности времён использовался интерферометр с двумя «плечами», расположенными под углом $90^0$. Свет от источника $S$




посылался в двух взаимно перпендикулярных направлениях, отражался от зеркал *A* и *B*, находящихся на одинаковом расстоянии $\ell$ от источника *S*, и возвращался в точку *S*. На экране наблюдается интерференционная картина.

В этом опыте сравнивалось время прохождения светом обоих путей: *SAS* и *SBS*. Предположим, что установка вместе с Землёй движется так, что её скорость $\vec{\upsilon}$ относительно эфира направлена вдоль *SA*. Если скорость света подчиняется обычному закону сложения скоростей, то на пути *SA* скорость света относительно Земли равна $c-\upsilon$, а на обратном пути $c+\upsilon$. Тогда время прохождения пути *SAS* равно

$$t_{II} = \frac{\ell}{c-\upsilon} + \frac{\ell}{c+\upsilon} = \frac{2\ell}{c} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2}.$$

На пути *SBS* скорость света относительно Земли равна $c' = \sqrt{c^2-\upsilon^2}$ и время прохождения этого пути

$$t_{\perp} = \frac{2\ell}{\sqrt{c^2-\upsilon^2}} = \frac{2\ell}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2}}.$$

Из сравнения выражений для $t_{II}$ и $t_{\perp}$ видно, что свет должен проходить оба пути за разное время.

По мере движения Земли происходит изменение ориентации интерферометра относительно вектора $\vec{\upsilon}_{\text{эфира}}$. Следовательно, по мере изменения ориентации интерферометра должна меняться интерференционная картина.

Результат опыта оказался отрицательным: разность времён не была обнаружена. Следовательно, свет от источника в интерферометре всегда распространяется со скоростью *c* относительно источника света.

*Вывод*: скорость света *c* не зависит от движения источника или наблюдателя.

Отрицательный результат опыта Майкельсона показал, что

1. Эфира (особой среды, которая могла бы быть принята в качестве абсолютной системы отсчёта), не существует.
2. К скорости света нельзя применить классический закон сложения скоростей. Скорость света не зависит от движения источника света.

К концу XIX века в физике сложилась своеобразная ситуация. С одной стороны теоретически была предсказана возможность выделить из множества инерциальных систем главную, абсолютную систему, с другой стороны попытки обнаружить эту систему оканчивались неудачей. Решение этой проблемы было дано лишь в теории относительности Эйнштейна.

## 9.3. ПОСТУЛАТЫ ЭЙНШТЕЙНА

Специальная теория относительности, созданная Эйнштейном в 1905 году – это современная физическая теория пространства и времени. При этом, как и в классической механике, предполагается, что время однородно, а пространство однородно и изотропно. **Специальная теория относительности часто называется <u>релятивистской теорией.</u>** В основе специальной теории относительности лежат **<u>постулаты Эйнштейна</u>:**

1. **Первый постулат.** <u>Принцип относительности</u>: никакие опыты (механические, электрические, оптические), проведённые внутри данной инерциальной системы отсчёта, не дают возможности обнаружить, покоится эта система или движется равномерно и прямолинейно. Все законы природы инвариантны, то есть не меняются при переходе от одной системы отсчёта к другой.
2. **Второй постулат.** <u>Независимость скорости света от скорости источника</u>: скорость света в вакууме не зависит от скорости движения источника света или наблюдателя и одинакова во всех инерциальных системах отсчёта.

Таким образом, первый постулат Эйнштейна является обобщением механического принципа Галилея на любые физические процессы: все инерциальные системы отсчёта совершенно равноправны, то есть **физические явления во всех инерциальных системах отсчёта протекают одинаково**.

Согласно второму постулату, **скорость света в вакууме одинакова во всех инерциальных системах отсчёта**.

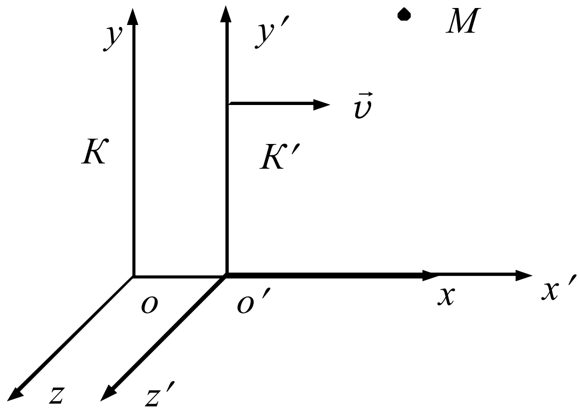
Таким образом, скорость света в вакууме занимает особое положение в природе. Наличие такой скорости существенно изменяет представление о пространстве и времени. Потеряло смысл не только абсолютное пространство, но и абсолютное время.

В настоящее время оба постулата и все следствия из них убедительно подтверждаются экспериментом.

## 9.4. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА

Постулатам Эйнштейна удовлетворяют преобразования Лоренца, предложенные им в 1904 г.

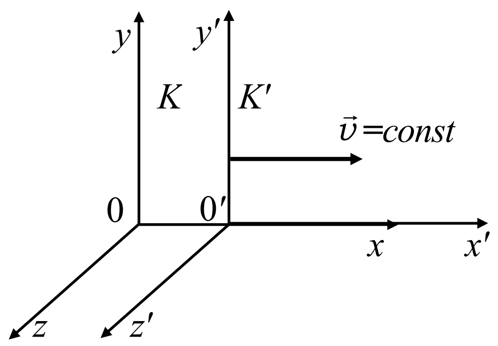
Рассмотрим две инерциальные системы отсчёта $K$ и $K'$. Пусть $K'$– система движется относительно $K$ – системы со скоростью $\vec{v}$. Направим координатные оси обеих систем так, как показано на рисунке.




Оси $x$ и $x'$ совпадают и направлены параллельно вектору $\vec{v}$. Возьмём за начало отсчёта времени момент, когда начала координат *0* и *0′* совпадали.

Пусть в момент времени $t'$ в системе $K'$ в точке $M$ с координатами $x'$, $y'$, $z'$ произошло некоторое событие, например, вспыхнула лампочка. Требуется найти координаты $x$, $y$, $z$ и момент времени $t$ этого события в системе $K$.

В соответствии с принципом относительности все инерциальные системы отсчета равноправны. В инерциальных системах отсчета физические законы должны иметь одинаковую форму выражения.




Рассмотрим две инерциальные системы отсчета : $K$ и $K'$.
$K'$ движется относительно $K$ с $\vec{\upsilon} = const$ – равномерно и прямолинейно.
В начальный момент времени 0 и 0′ совпадают.
Пусть следим за точкой $x' = 0$ (начало отсчёта $K'$) из системы $K \Rightarrow x = \upsilon t$.
Если следим за точкой $x = 0$ из системы $K' \Rightarrow x' = -\upsilon t'$.

Преобразования координат – это формулы преобразования координат материальной точки и времени при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Эти преобразования должны переходить в преобразования Галилея при скоростях движения тел малых по сравнению со скоростью света, то есть при $\upsilon << c$ и удовлетворять постулатам Эйнштейна.

Этому требованию отвечают только линейные преобразования:

$$x = A(x' + \upsilon t'), \quad (1)$$

$$x' = A(x - \upsilon t). \quad (2)$$

Если предположить, что в этих системах распространяется световой сигнал, то в соответствии со II постулатом скорость света в вакууме – инвариант (постоянна).

$$x = ct; \quad x' = ct'. \quad (3)$$

С учётом уравнений (1), (2), перепишем (3):

$$\begin{aligned} ct &= A(ct' + \upsilon t') = At'(c + \upsilon); \\ ct' &= A(ct - \upsilon t) = At(c - \upsilon). \end{aligned} \quad (4)$$

Перемножим уравнения системы (4):

$$c^2 tt' = A^2 tt'(c^2 - \upsilon^2). \quad (5) \quad \Rightarrow A^2 = \frac{c^2}{c^2 - \upsilon^2} = \frac{1}{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}. \quad (6)$$

$A = \pm \dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}$, (7) так как оси направлены в одну сторону, то остается $+A$:

$$A=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}, \quad (8) \quad \frac{\upsilon}{c}=\beta \quad \Rightarrow A=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (9)$$

Уравнение (9) подставляем в (1), (2):

$$x'=\frac{x-\upsilon t}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (10) \qquad x=\frac{x'+\upsilon t'}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (10a)$$

В начальный момент времени: системы $K$ и $K'$ совпадают, движение происходит вдоль оси $x$: $\Rightarrow y=y',\ \ z=z'$.

Найдём преобразование для времени.
Из уравнения (10$a$) следует:

$$x\sqrt{1-\beta^2}=x'+\upsilon t'=\text{подставляем}(10)=\frac{x-\upsilon t}{\sqrt{1-\beta^2}}+\upsilon t' \Rightarrow$$

$$\frac{x\left(1-\beta^2\right)-x+\upsilon t}{\sqrt{1-\beta^2}}=\upsilon t' \quad \Rightarrow \quad t'=\frac{t-x\frac{\upsilon}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Аналогично: $t=\dfrac{t'+x'\frac{\upsilon}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

Прямые преобразования $K \to K'$:

$$x'=\frac{x-\upsilon t}{\sqrt{1-\beta^2}},$$
$$y'=y,$$
$$z'=z, \qquad (12)$$
$$t'=\frac{t-x\frac{\upsilon}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Обратные преобразования $K' \to K$:

$$x=\frac{x'+\upsilon t'}{\sqrt{1-\beta^2}},$$
$$y=y',$$
$$z=z', \qquad (13)$$
$$t=\frac{t'+x'\frac{\upsilon}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Классические преобразования Галилея:

$$x' = x - \upsilon t, \qquad x = x' + \upsilon t,$$
$$y' = y, \qquad y = y',$$
$$z' = z, \qquad z = z',$$
$$t' = t. \qquad t = t'.$$

При $\upsilon << c$: $\left(\dfrac{\upsilon}{c}\right)^2 = \beta^2 << 1$, преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея.

## 9.5. СЛЕДСТВИЯ ИЗ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛОРЕНЦА

### 9.5.1. Относительность понятия одновременности

Пусть в системе $K$ в точках с координатами $x_1$ и $x_2$ в моменты времени $t_1$ и $t_2$ могут происходить 2 события.
В системе $K'$ им соответствуют координаты $x'_1$ и $x'_2$, время $t'_1$ и $t'_2$.

1. Если в системе $K$ события происходят в одной точке $x_1 = x_2$ и являются одновременными $t_1 = t_2$, будут ли события одновременными в системе $K'$, движущейся относительно системы $K$ со скоростью $\upsilon$?

Из преобразований Лоренца следует:

$x'_1 = x'_2$, $t'_1 = t'_2$, то есть эти события в системе

$K'$ происходят в одной точке и являются одновременными. Следовательно, эти события для любых инерциальных систем отсчета являются *одновременными и пространственно совпадающими*.

2. Если в системе $K$ события происходят в разных точках $x_1 \neq x_2$ – пространственно разобщены, но одновременно $t_1 = t_2$. Будут ли эти события одновременны в системе $K'$, движущейся относительно $K$ со скоростью $\upsilon$?

В системе $K'$:

$$x'_1 = \frac{x_1 - \upsilon t}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad x'_2 = \frac{x_2 - \upsilon t}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$t'_1 = \frac{t - \frac{\upsilon x_1}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad t'_2 = \frac{t - \frac{\upsilon x_2}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

т.е. $x'_1 \neq x'_2$, $t'_1 \neq t'_2$, события остаются пространственно разобщенными и оказываются неодновременными.

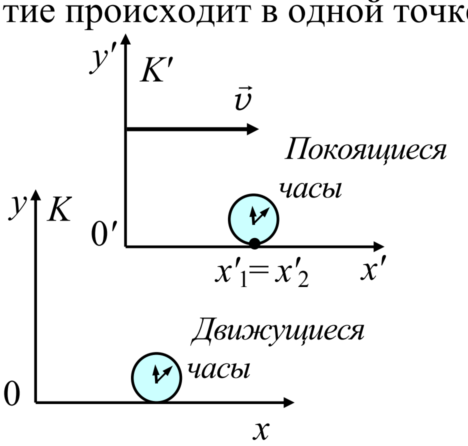
События одновременные в одной системе отсчёта *не одновременны* в другой системе отсчета.

$$t'_2 - t'_1 = \frac{t - \dfrac{\upsilon x_2}{c^2} - t + \dfrac{\upsilon x_1}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\upsilon(x_1 - x_2)}{c^2\sqrt{1-\beta^2}} \neq 0.$$

Знак определяется знаком выражения $\upsilon(x_1 - x_2)$.

### 9.5.2. Длительность интервала между событиями в разных системах отсчёта

Пусть в системе $K'$ в точке с координатой $x'_1$ произошли два события, интервал между событиями в этой системе $\tau'_0 = t'_2 - t'_1$, где $t'_1$ – показания часов, когда произошло первое событие и $t'_2$ – показания часов, когда произошло второе событие. Индекс «0» означает, что событие происходит в одной точке пространства в системе отсчета $K'$.




*Собственное время* показывают часы, которые покоятся относительно системы отсчёта в некоторой точке с координатой, в которой произошли 2 события. Эти часы называются *покоящимися*.

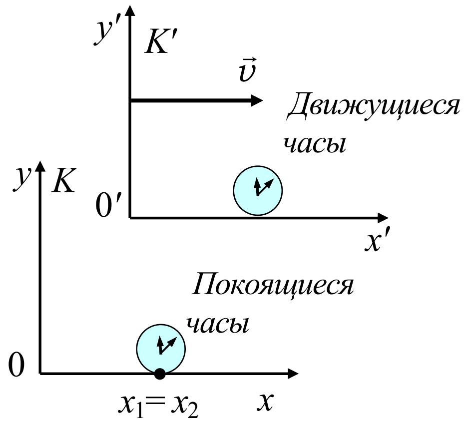
Часы, которые движутся относительно системы отсчёта, в некоторой точке которой произошли 2 события, называются *движущимися*.

В системе отсчета $K'$: $x'_1 = x'_2$; $\tau'_0 = t'_2 - t'_1$ (1) – время между 2-мя событиями, которые показывают покоящиеся часы.

В системе отсчета $K$: $\tau = t_2 - t_1 = \dfrac{t'_2 + \dfrac{\upsilon x'_2}{c^2} - t'_1 - \dfrac{\upsilon x'_1}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \dfrac{\tau'_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$. (2) $\Rightarrow$

$$\tau \cdot \sqrt{1-\beta^2} = \tau'_0. \quad (3) \qquad \tau > \tau'_0.$$

Движущиеся часы показывают большее время.




Часы покоятся в системе $K$.
2 события происходят в $K$ в некоторой точке с координатой $x_1 = x_2$.
В системе $K'$:

$$\tau' \cdot \sqrt{1-\beta^2} = \tau_0. \ (4) \qquad \underbrace{\tau'}_{\text{движ.ч.}} > \underbrace{\tau_0}_{\text{покоящ.ч.}}.$$

**Время, измеряемое по часам, движущимся вместе с данным объектом, называется собственным временем этого объекта. Собственное время (жизни объекта) всегда имеет наименьшее значение**.
Интервал времени между событиями зависит от выбора системы отсчёта, то есть время между событиями *относительно*.

В классической механике: $\upsilon << c \quad \Rightarrow \beta = \dfrac{\upsilon}{c} << 1 \quad \Rightarrow \tau' = \tau_0; \qquad \tau_0' = \tau.$

**Пример 1: опыт с мюонами.**
Эти частицы (мюоны) рождаются на расстоянии 30 км от поверхности Земли и обнаруживаются вблизи поверхности Земли, то есть проходят путь $S = 30$ км. Мюоны относятся к нестабильным частицам. Их собственное время жизни (по часам в той инерциальной системы отсчета, относительно которой он покоится) $\tau'_0 = 2\cdot 10^{-6}$ с.

Если принять, что мюоны движутся со скоростью близкой к скорости света, то путь, пройденный мюоном в системе отсчета, связанной с самой частицей (в системе отсчета $K'$)

$$S' = c \cdot \tau_0' = 3 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 10^{-6} = 600 м << 30 км.$$

В системе отсчёта, связанной с Землёй, время существования (жизни) мюона: $\tau = \dfrac{\tau_0'}{\sqrt{1-\beta^2}}; \qquad \tau > \tau_0'.$

Поэтому за время жизни мюон с точки зрения земного наблюдателя пролетает расстояние $\quad c\tau > c\tau_0' \quad \Rightarrow S > S'.$

**Пример 2: «парадокс близнецов (часов)»**
Релятивистский эффект замедления времени в космическом корабле, движущемся относительно Земли, открывает возможность осуществления сколь угодно дальних космических полетов и путешествий в «будущее». Согласно принципу относительности, все процессы на космическом корабле, включая и процесс старения космонавтов, идут по

тем же законам, что и на Земле. Однако при этом время на корабле необходимо измерять по часам, движущимся вместе с ним со скоростью $\upsilon$ относительно Земли.

Пусть осуществляется космический полёт со скоростью близкой к скорости света $c$ ($\beta = 0{,}99999$).

Если покоящиеся часы связаны с космическим кораблём, удаляющемся с $\upsilon = \beta c$, то для наблюдателя, связанного с Землёй, ход часов в космическом аппарате замедляется в $\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ раз или ход часов на корабле и на Земле отличается в $\dfrac{\tau}{\tau_0'} = 224$. Следовательно, на таком корабле за промежуток времени $\tau_0 = 10\ \textit{лет}$ (по часам на корабле) можно постареть на 10 лет. Этот космический перелет по часам на Земле будет продолжаться $\tau = 2240\ \textit{лет}$. При этом корабль удалится от Земли на огромное расстояние $S = \upsilon\tau = \beta \cdot c\tau = 2239{,}98\ \textit{световых лет}$.

Если космонавт, совершивший космический перелет со скоростью $\upsilon$, близкой к скорости света $c$, возвратится на Землю, то обнаружит, что люди на Земле (в частности, его брат-близнец, оставшийся на Земле) постарели за время полета больше, чем он.

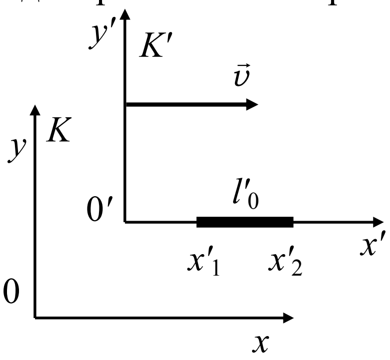
С другой стороны, основываясь на принципе относительности, можно прийти к прямо противоположному выводу: часы на Земле, движущейся со скоростью $\upsilon$ относительно космического корабля, должны отставать от часов на корабле. Поэтому длительность полета должна быть большей для космонавта, а не для жителей Земли. Соответственно, из двух близнецов за время полета больше должен постареть космонавт. Таким образом, получается, что разность показаний часов на Земле и корабле после приземления должна быть, с одной стороны, положительной, а с другой – отрицательной. Этот результат получил название парадокса часов или «парадокса близнецов».

В действительности никакого парадокса нет. Парадоксальный результат возник только вследствие неправильного применения принципа относительности. Принцип относительности справедлив только для инерциальных систем отсчета. Системы отсчета, связанные с близнецами, не эквивалентны. Система отсчета, связанная с Землей – это инерциальная система отсчета, система отсчета, связанная с кораблем – это неинерциальная система отсчета (корабль движется с ускорением на подъеме и спуске). Следовательно, принцип относительности к ним не применим.

### 9.5.3. Длина тел в разных системах отсчёта

**Длина отрезка (стержня) в различных системах отсчёта**.

*Длина отрезка* – разность координат его начала и конца, измеренных одновременно в выбранной системе отсчёта.




Отрезок (стержень) расположен вдоль оси $x'$ и покоится относительно $K'$.

Его длина в $K'$: $l'_0 = x'_2 - x'_1$; $t'_1 = t'_2$.(1)

$K'$ движется относительно $K$ со скоростью $\upsilon$.

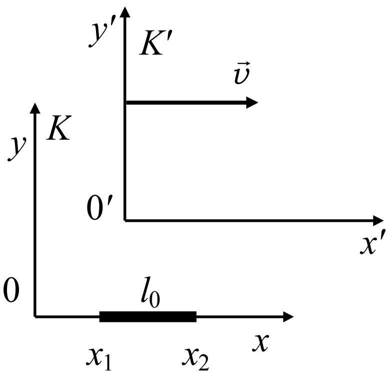
Длина отрезка в $K$:

$$l'_0 = \frac{x_2 - \upsilon t_2}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{x_1 - \upsilon t_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{x_2 - \upsilon t_2 - x_1 + \upsilon t_1}{\sqrt{1-\beta^2}};(2)$$

*при* $t_1 = t_2 \Rightarrow$

$$l'_0 = \frac{l}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (3) \Rightarrow l = l'_0\sqrt{1-\beta^2}, \quad (4) \qquad l'_0 > l.$$

**Длина стержня $l'_0$ в системе, относительно которой он покоится, больше длины стержня $l$ в системе, относительно которой он движется.**




Стержень покоится в системе $K$, система $K'$ движется относительно $K$ со скоростью $\upsilon$.

В системе $K$:

$l_0 = x_2 - x_1$; $\quad t_1 = t_2. \Rightarrow$

$$l_0 = \frac{x'_2 - \upsilon t'_2 - x'_1 + \upsilon t'_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = (\text{при} \quad t'_1 = t'_2) = \frac{l'}{\sqrt{1-\beta^2}}. \Rightarrow$$

В системе $K'$:

$l' = l_0\sqrt{1-\beta^2} \Rightarrow l_0 > l'.$

**Длина стержня $l_0$ в системе, относительно которой он покоится, больше длины стержня $l'$ в системе, относительно которой он движется.**

*Линейные размеры тела, движущегося относительно инерциальной системы отсчета, уменьшаются* в направлении движения в $\sqrt{1-\beta^2}$ раз.

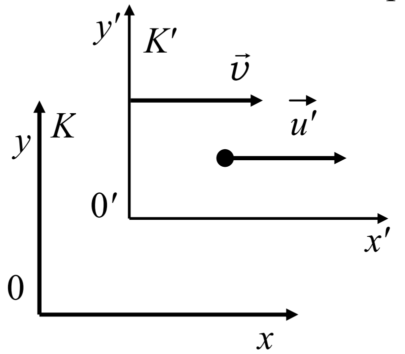
Длина отрезка, измеренная в системе отсчёта, в которой он покоится, называется его *собственной длиной*. **Собственная длина всегда имеет наибольшее значение**.

Длина отрезка зависит от выбора системы отсчёта, то есть длина *относительная величина*.

В классической механике: $\upsilon << c \quad \Rightarrow \beta = \dfrac{\upsilon}{c} << 1 \quad \Rightarrow l = l_0'; \quad l' = l_0$.

### 9.5.4. Релятивистское правило сложения скоростей

Пусть точка *М* движется в системе $K'$ со скоростью $\vec{u}'$ по направлению оси $x'$. Найдем скорость $\vec{u}$ этой точки в системе *К*.




• В механике Ньютона, если $\upsilon << c$, то по правилу сложения скоростей Галилея, скорость тела относительно системы *К:*

$\vec{u} = \vec{\upsilon} + \vec{u}'$.

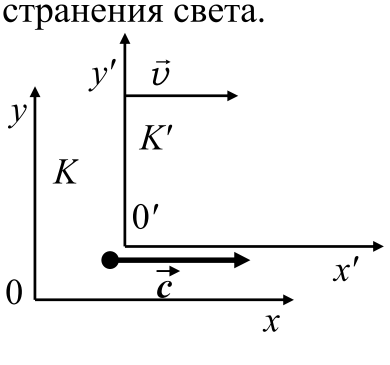
Так как движение происходит вдоль оси *x*, то

$u_x = \upsilon + u_x'$,

$u_y = u_y'$,

$u_z = u_z'$.

Рассмотрим с точки зрения классической механики явление распространения света.




Пусть в системе *К* есть источник света, в *К*′ – приёмник света.

Применяя преобразования Галилея скорость света относительно *К*′: $\vec{c}' = \vec{c} - \vec{\upsilon} < \vec{c}$, что не подтверждается экспериментальными результатами. $c = const$.

Этот факт является одним из постулатов, лежащих в основе СТО.

Эйнштейн объяснил этот результат свойствами пространства и времени: с точки зрения движущегося наблюдателя (система $K'$) пространство «сокращается» в направлении движения в $\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$ раз, а интервал времени $dt$ по измерениям того же наблюдателя уменьшается в $\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$ раз. Следовательно, $\frac{dx}{dt}=\frac{dx'}{dt'}=c=const.$

Таким образом, правило сложения скоростей Галилея нельзя применять в случае движения тел со скоростями  близкими к скорости света.

Если система $K'$ движется относительно системы $K$ со скоростью близкой к скорости света $c$, то:
Проекции скорости материальной точки на координатные оси в системе $K$:

$$u_x=\frac{dx}{dt};\;\; u_y=\frac{dy}{dt};\;\; u_z=\frac{dz}{dt}. \quad (1)$$

Проекции скорости материальной точки на координатные оси в системе $K'$:

$$u'_x=\frac{dx'}{dt'};\;\; u'_y=\frac{dy'}{dt'};\;\; u'_z=\frac{dz'}{dt'}. \quad (2)$$

Согласно преобразованиям Лоренца:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{x-\upsilon t}{\sqrt{1-\beta^2}},\\ y' &= y,\\ z' &= z,\\ t' &= \frac{t-x\frac{\upsilon}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \end{aligned}\right\} u'_x=\frac{dx'}{dt'}=\frac{dx-\upsilon dt}{dt-\frac{\upsilon dx}{c^2}}\cdot\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{\frac{dx}{dt}-\upsilon}{1-\frac{\upsilon\frac{dx}{dt}}{c^2}}=\frac{u_x-\upsilon}{1-\frac{u_x\upsilon}{c^2}}. \quad (3)$$

$$u'_y=\frac{dy'}{dt'}=\frac{dy\sqrt{1-\beta^2}}{dt-\frac{\upsilon dx}{c^2}}=\frac{u_y\sqrt{1-\beta^2}}{1-\frac{u_x\upsilon}{c^2}}. \quad (4)$$

$$u'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz\sqrt{1-\beta^2}}{dt - \frac{\upsilon dx}{c^2}} = \frac{u_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{u_x \upsilon}{c^2}}. \quad (5)$$

$$u' = \sqrt{u'^2_x + u'^2_y + u'^2_z}.$$

Если материальная точка движется в системе *K* вдоль оси *x* со скоростью *c*: $u_x = c$,

$$u'_x = \frac{c - v}{1 - \frac{cv}{c^2}} = c,$$

то её скорость в системе *K′* равна *c*. Следовательно, объект, движущийся со скоростью *c*, будет иметь эту же скорость относительно других систем независимо от того, сколь быстро они движутся (согласие с II постулатом Эйнштейна).

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие причины возникновения специальной теории относительности?
2. В чем заключается постулаты специальной теории относительности?
3. Зависит ли от скорости движения системы отсчета скорость тела? Скорость света?
4. Запишите и поясните преобразования Лоренца.
5. При каких условиях преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея?
6. Какие следствия вытекают из специальной теории относительности для размеров тел и длительности событий в разных системах отсчета?

## Слова и выражения

В качестве *чего?*
Вакуум
Возможность
Вспыхнуть
Длительность
Достигнуть
Достигший
Подставить (подставлять)
Подтвердить (подтвердиться)
Подчиниться (подчиняться)
Показание (часов и т.п.)
Полагать
Постулат
Превысить

Естественный
Заменить
Заполнять (заполнить)
Измеренный
Измерить
Инвариантный
Испытание
Лампочка
Направить (направлять)
Неудача
Очевидно
Подвергать испытанию

Предсказать
Преобразование
Проверить
Произойти
Пытаться
Распространение
Своеобразный
Событие
Специальный
Среда (окружающая)
Течь/протекать (о явлениях)

## Лекция 10

# СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

Термины и понятия

Весьма
Взаимосвязь
Возвести (в квадрат)
Гласить (закон гласит)
Закон взаимосвязи массы и полной энергии тела
Закон сохранения релятивистского импульса
Масса покоя
Мера энергосодержания тела
Недоступный
Непосредственно
Полная энергия тела
Обусловлен, -а. –о, -ы чем?
Оказываться (оказаться) чем? каким?
Притяжение
Релятивистская кинетическая энергия частицы
Релятивистский импульс
Сопровождаться чем?
С учетом чего?
Увеличение (или вырастание)
Упростить
Ускоритель
Чрезвычайно
Эквивалентный
Энергия покоя
Ядерный процесс

## 10.1. ДИНАМИКА ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

### ОСНОВНОЙ ЗАКОН РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Из принципа относительности следует, что математическая запись любого закона физики должна быть одинаковой во всех инерциальных системах отсчета. Это означает, что уравнения, описывающие какое-либо явление в системе отсчета $K'$, получаются из уравнений, описывающих это же явление в системе отсчета $K$ . Это условие называется **условием ковариантности уравнений физических законов относительно преобразований Лоренца.** При использовании преобразований Лоренца происходит замена штрихованных величин (измеренных относительно системы $K'$) на нештрихованные (измеренные относительно системы $K$).

Основной закон классической механики Ньютона для материальной точки $m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F}$ или $\frac{d}{dt}(m\vec{v})=\vec{F}$, в котором масса $m$ этой точки и действующая на неё сила $\vec{F}$ считаются одинаковыми во всех инерциальных системах отсчета. Поэтому в классической механике масса – это коэффициент пропорциональности между силой и изменением скорости. Масса не зависит от скорости и инвариантна по отношению к выбору системы отсчета. Инертная масса не зависит от направления действия силы.

В классической механике принято, что импульс материальной точки пропорционален её массе и совпадает по направлению со скоростью $\vec{\upsilon}$ этой точки: $\vec{P} = m\vec{\upsilon}$, поэтому $\vec{F} = \dfrac{d\vec{P}}{dt}$ – основной закон динамики (2 закон Ньютона).

В релятивистской динамике импульс также как в классической динамике пропорционален массе и совпадает по направлению со скоростью $\vec{\upsilon}$ этой точки. Однако, в отличие от классической механики импульс материальной точки не линейная функция от скорости:

$\vec{P} = \dfrac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}$, тогда основное уравнение релятивистской динамики:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}\right).$$

В релятивистской механике масса $m(\vec{\upsilon})$ утрачивает смысл коэффициента пропорциональности между векторами $\vec{a}$ и $\vec{F}$:

$\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)$; *так как* $\vec{p} = f\left(\upsilon, \vec{\upsilon}\right), \Rightarrow$ исследуем эту зависимость:

• Если $\vec{F} \perp \vec{\upsilon} \Rightarrow \upsilon^2 = const$. Так как $\vec{a} = \dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}$, $\vec{F} = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}\vec{a} \Rightarrow$ отсюда $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}$.

• Если $\vec{F} \parallel \vec{\upsilon} \quad \Rightarrow$, то $\vec{F} = \dfrac{m_0}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}\right)^3}} \vec{a} \qquad \Rightarrow$ отсюда $\quad m = \dfrac{m_0}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}\right)^3}}$.

В отличие от Ньютоновской механики вектор силы $\vec{F}$ в релятивистской механике не является инвариантом (в различных инерциальных системах отсчета $\vec{F}$ имеет различные модули и направления).

Итак, основное уравнение релятивистской динамики:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d(m\vec{\upsilon})}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}\right), \text{ где } m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}}},$$

а $m_0$ – масса покоя частицы (в системе отсчёта, относительно которой частица находится в покое).

При малых скоростях ($\upsilon << c$) уравнение практически совпадает с уравнением механики Ньютона. Однако по мере увеличения скорости материальной точки её импульс возрастает быстрее, чем скорость. Очевидно, что $\lim\limits_{\upsilon \to c} P = \infty$. Все реальные силы конечны по величине, а их действие на тело ограничено по времени. Поэтому силы не могут сообщить телу бесконечно большой импульс. Следовательно, скорость тела по отношению к любой инерциальной системе отсчета не может быть равна скорости света в вакууме, а всегда меньше её.

## 10.2. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЧАСТИЦЫ

Определим эту величину таким же путём, как и в ньютоновской механике. Было доказано, что приращение кинетической энергии материальной точки на элементарном перемещении равно работе силы на этом перемещении:

$$dE_k = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{\upsilon} dt.$$

Согласно основному закону релятивистской динамики $\vec{F}dt = d(m\vec{\upsilon}) = dm \cdot \vec{\upsilon} + md\vec{\upsilon}$,

где $m$ – релятивистская масса. Поэтому

$$dE_k = dm(\vec{\upsilon} \cdot \vec{\upsilon}) + m\,(d\vec{\upsilon} \cdot \vec{\upsilon}) = \upsilon^2 dm + m \cdot \upsilon d\upsilon,$$

где учтено, что $\vec{\upsilon}d\vec{\upsilon} = \upsilon d\upsilon$ и $(\vec{\upsilon}\cdot\vec{\upsilon}) = \upsilon^2$. Эту формулу можно упростить. Для этого формулу зависимости массы от скорости возведём в квадрат и приведём её к виду: $m^2c^2 = m^2\,\upsilon^2 + m_0{}^2c^2$.

Найдём дифференциал этого выражения, имея в виду, что $m_0$ и $c$ – постоянные величины.

$2\,mc^2dm = 2\,m\,\upsilon^2dm + 2\,m^2\upsilon\,d\upsilon$.

Если теперь разделить это равенство на $2m$, то его правая часть совпадёт с выражением для $dE_k$. Отсюда следует

$$dE_k = c^2dm = c^2\cdot d\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}\right).$$

Таким образом, **приращение кинетической энергии частицы пропорционально приращению её релятивистской массы**.

Кинетическая энергия покоящейся частицы равна нулю, а её масса равна массе покоя $m_0$. Поэтому, проинтегрировав последнее выражение, получаем

$$E_k = \int dE_k = \int_{m_0}^{m} c^2dm = (m-m_0)c^2\ ,$$

или

$$E_k = mc^2 - m_0c^2; \qquad\qquad E_k = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}-1\right).$$

Это и есть выражение для релятивистской кинетической энергии частицы. Как видно, оно сильно отличается от ньютоновского $m_0\upsilon^2/2$. Легко убедиться (пользуясь формулой бинома Ньютона), что при малых скоростях $\upsilon \ll c$, выражение для релятивистской кинетической энергии переходит в ньютоновское.

## 10.3. ЗАКОН ВЗАИМОСВЯЗИ МАССЫ И ЭНЕРГИИ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЧАСТИЦЫ

Из формулы приращения кинетической энергии частицы $dE_k$ видно, что оно сопровождается пропорциональным приращением её релятивистской массы.

$$dE_k = c^2 dm = c^2 \cdot d\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}\right) \qquad \text{или} \qquad E_k = mc^2 - m_0c^2,$$

где $E = mc^2$ – называют полной энергией тела, а $E_0 = m_0c^2$ – энергией покоя.

Эйнштейн пришёл к выводу, что масса тела будет вырастать не только при сообщении ему кинетической энергии, но и при увеличении общего запаса энергии (кинетической, электрической, тепловой, химической и т.д.). Полная энергия тела $E$ связана с массой этого тела $m$ соотношением

$$E=mc^2.$$

Формула полной энергии тела выражает один из наиболее фундаментальных законов природы – закон взаимосвязи (пропорциональности) массы и полной энергии тела.

Это соотношение можно записать и в другой форме:

$$E = m_0c^2 + E_k,$$

где $m_0$ – масса покоя тела, $E_k$ – его кинетическая энергия. Отсюда непосредственно следует, что покоящееся тело ($E_k = 0$) также обладает энергией.

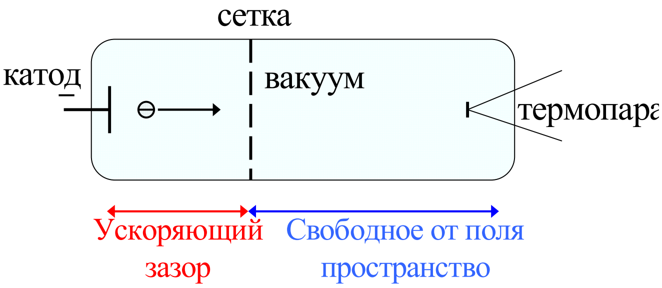
$$E_0 = m_0c^2.$$

Эту энергию называют энергией покоя.

Мы видим, что масса тела, которая в классической механике выступала как мера инертности (во втором законе Ньютона) теперь выступает в новой функции – как мера энергосодержания тела. Даже покоящееся тело, согласно теории относительности, обладает запасом энергии – энергией покоя.

Изменение полной энергии тела сопровождается эквивалентным изменением его массы $\Delta m = \dfrac{\Delta E}{c^2}$ и наоборот. При обычных макроскопических процессах изменение массы тела оказывается чрезвычайно малым, недоступным для измерений. Справедливость закона взаимосвязи массы и энергии экспериментально проверена в ядерной физике. Это обусловлено тем, что ядерные процессы и процессы превращения элементарных частиц сопровождаются весьма большими изменениями энергии, сравнимыми с энергией покоя самих частиц.

Опыт Бертоцци экспериментально доказывает, что нельзя ускорить электрон до скорости, превышающей $c$.

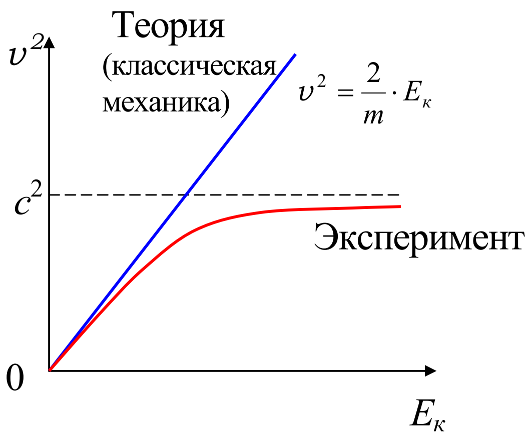



Термопара – для определения кинетической энергии, переходящей в тепло при ударе по ней электронов.

Классическая частица (по механике Ньютона):

$$E_к = \frac{p^2}{2m} = \frac{m\upsilon^2}{2} \Rightarrow \upsilon^2 = \frac{2}{m} \cdot E_к \Rightarrow$$

зависимость – линейная.




Релятивистская частица (по релятивистской динамике):

$$\vec{p} = \frac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}$$ – релятивистский импульс.

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}$$ – релятивистская масса

(масса частицы в системе, относительно которой она движется).

$E_k = mc^2 - m_0c^2$ – кинетическая энергия.

## СВЯЗЬ ПОЛНОЙ ЭНЕРГИИ И ИМПУЛЬСА

Связь кинетической энергии и импульса в классической механике Ньютона выражается формулой: $E_k = \dfrac{p^2}{2m} = \dfrac{m\upsilon^2}{2}$, при этом $m = m_0 = const$. Если потенциальную энергию не учитываем, то полная энергия частицы равна её кинетической энергии, в этом случае $E_k = \dfrac{p^2}{2m} = \dfrac{m\upsilon^2}{2} = E$.

Найдем связь полной энергии и импульса для тела, движущегося со скоростью, близкой к скорости света:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} = mc^2 \qquad \Rightarrow$$

Преобразуем выражение (избавимся от квадратного корня):

$$m^2c^4\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right) = m_0^2c^4, \qquad \underbrace{m^2c^4}_{E^2} - \underbrace{m^2\upsilon^2}_{p^2}c^2 = m_0^2c^4 \qquad \Rightarrow E^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4.$$

Отсюда $\qquad E^2 = m_0^2c^4 + p^2c^2 \qquad \Rightarrow E = \sqrt{m_0^2c^4 + p^2c^2}.$

## СВЯЗЬ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ И ИМПУЛЬСА

Связь кинетической энергии и импульса в классической механике Ньютона выражается формулой: $E_k = \frac{p^2}{2m} = \frac{m\upsilon^2}{2}$, при этом $m = m_0 = const.$

Найдем связь кинетической энергии и импульса для тела, движущегося со скоростью, близкой к скорости света:

$E^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4 = E_0^2$, где $E_0$ – энергия покоя.

Так как полная энергия тела равна сумме энергии покоя и кинетической энергии, то:

$$E = E_0 + E_k \Rightarrow E^2 = E_0^2 + 2E_0E_k + E_k^2.$$

Или

$$E^2 - p^2c^2 = E_0^2 + 2E_0E_k + E_k^2 - p^2c^2 = E_0^2 \Rightarrow p = \frac{1}{c}\sqrt{E_k\left(2E_0 + E_k\right)}.$$

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какой вид имеет основной закон релятивистской динамики? Чем он отличается от основного закона ньютоновской механики?
2. В чем заключается закон сохранения релятивистского импульса?
3. Напишите выражение для кинетической энергии в теории относительности. При каком условии релятивистская формула для кинетической энергии переходит в классическую формулу?
4. Сформулируйте закон взаимосвязи массы и энергии.

## Лекция 11

# ДВИЖЕНИЕ ТЕЛ В НЕИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ОТСЧЕТА

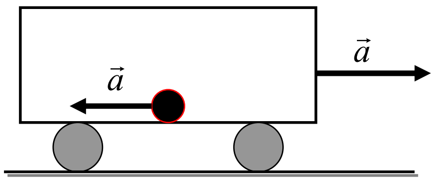
### Термины и понятия

Неинерциальная система отсчета
Принцип эквивалентности сил инерции и сил тяготения (принцип эквивалентности Эйнштейна)
Силы инерции
Фиктивные силы
Центробежная сила инерции
Центростремительные силы

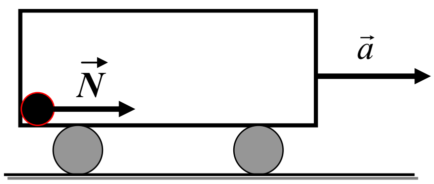
## 11.1. НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

До сих пор мы имели дело с инерциальными системами отсчета, то есть системами, в которых выполняются законы Ньютона. **Системы отсчета, которые движутся относительно инерциальных систем с ускорением, называются <u>неинерциальными</u>.**

Примером неинерциальной системы отсчета является геоцентрическая система отсчета (жёстко связанная с Землёй) вследствие суточного вращения Земли. Однако максимальное ускорение точек поверхности Земли не превышает 0,5 %$g$, поэтому в большинстве практических задач геоцентрическую систему отсчета считают инерциальной.
В неинерциальных системах отсчета законы Ньютона не выполняются. Рассмотрим несколько примеров движения тел относительно неинерциальных систем отсчета.



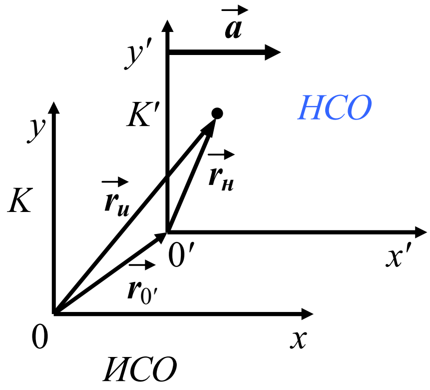

Поезд начал движение с ускорением $\vec{a}$, шарик приобрёл ускорение $\vec{a}$.
В данной неинерциальной системе отсчета *первый закон Ньютона* нарушается: тело получает ускорение без взаимодействия с другими телами.




Поезд движется с ускорением $\vec{a}$, шарик у стенки, на него действует сила реакции опоры $\vec{N}$, но шарик находится в покое.
В данной неинерциальной системе отсчета *второй закон Ньютона* нарушается: при

наличии взаимодействия тело не получает ускорение.

## Принцип Даламбера




Имеем две системы отсчета: инерциальную – систему $K$ и неинерциальную – систему $K'$.

В момент $t = 0$ начала координат систем $K$ и $K'$ совпадают.

Система $K'$ начинает двигаться относительно $K$ с ускорением $\vec{a}$.

В момент $t$ скорость движения системы $K'$ относительно системы $K$: $\vec{\upsilon}_{0'} = \vec{a}t$.

Если $\vec{r}_и$ – радиус-вектор материальной точки в системе $K$,

$\vec{r}_н$ – радиус-вектор материальной точки в системе $K'$,

$\vec{r}_0$– радиус-вектор начала координат системы $K'$ в системе $K$,

то $\vec{r}_и = \vec{r}_0 + \vec{r}_н$.

Продифференцируем это уравнение по времени:

$$\frac{d\vec{r}_и}{dt} = \frac{d\vec{r}_{0'}}{dt} + \frac{d\vec{r}_н}{dt}, \qquad \text{или} \qquad \vec{\upsilon}_и = \vec{\upsilon}_{0'} + \vec{\upsilon}_н.$$

Продифференцируем ещё раз по времени:

$$\frac{d\vec{\upsilon}_и}{dt} = \frac{d\vec{\upsilon}_{0'}}{dt} + \frac{d\vec{\upsilon}_н}{dt}, \text{ так как } \vec{\upsilon}_{0'} = \vec{a}t, \text{ то}$$

$$\vec{a}_и = \vec{a} + \vec{a}_н, \qquad \Rightarrow \vec{a}_н = \vec{a}_и - \vec{a},$$

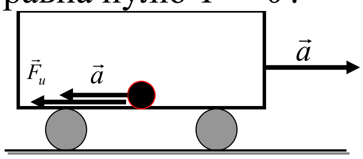
где $\vec{a}_н$ – ускорение материальной точки относительно неинерциальной системы отсчета, $\vec{a}_и$ – ускорение материальной точки относительно инерциальной системы отсчета, $\vec{a}$ – ускорение неинерциальной системы отсчета относительно инерциальной системы отсчета.

Умножим полученное выражение $\vec{a}_н = \vec{a}_и - \vec{a}$ на массу материальной точки: $m\vec{a}_н = m\vec{a}_и - m\vec{a}$. Так как относительно инерциальной системы отсчета законы Ньютона выполняются, то $m\vec{a}_и = \vec{F}$ – векторная сумма сил взаимодействия материальной точки с другими телами (реальные силы), величина ($-m\vec{a}$) имеет размерность силы, поэтому эта величина носит название **сила инерции.** Таким образом $\vec{F}_и = -m\vec{a}$**,** отсюда $m\vec{a}_н = \vec{F} + \vec{F}_и$ – это уравнение движения (второй закон Ньютона) относительно неинерциальной системы отсчета. Таким образом, **произведение массы тела на его ускорение относительно неинерциальной системы отсчета равно векторной сумме сил взаимодействия сложенной с силой инерции.** Данное определение называется **принцип Даламбера (д΄ Аламбера).**

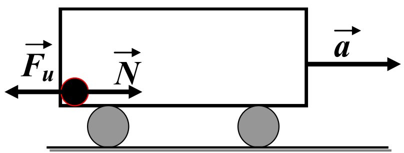
**Сила инерции – фиктивная сила в том смысле, что она не обусловлена взаимодействием с другими телами**, а вызвана ускоренным движением неинерциальной системы отсчета относительно инерциальной системы отсчета, однако ей приписываются свойства сил сообщать ускорение.

Так как сила инерции обусловлена ускоренным движением системы отсчёта относительно другой системы отсчета, то она не подчиняется *третьему закону Ньютона*.

Покажем это на примере. Шарик находится на полу вагона. Если вагон не движется, то шарик находится в состоянии покоя. Это означает, что результирующая сила, действующая со стороны других тел на шарик равна нулю $\vec{F} = 0$.




Если вагон начинает двигаться с ускорением $\vec{a}$, то шарик начнет двигаться с ускорением $\vec{a}$ относительно вагона. Если не учитывать силы трения, то уравнение движения шарика можно записать: $m\vec{a}_и = m\vec{a}_н + m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad m\vec{a}_н = \vec{F} + \vec{F}_и$, так как $\vec{F} = 0$, то $m\vec{a}_н = \vec{F}_и$ или $\vec{a}_н = \dfrac{\vec{F}_и}{m}$, так как $\vec{F}_и = -m\vec{a}$, то $\vec{a}_н = -\vec{a}$.




Если шарик покоится в неинерциальной системе отсчета, как показано на рисунке, то на него со стороны стенки действует (реальная) сила реакции опоры, тогда уравнение движения имеет вид:

$m\vec{a}_и = m\vec{a}_н + m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad m\vec{a}_н = \vec{N} + \vec{F}_и$, так как $\vec{a}_н = 0$ (шарик покоится), то $\vec{N} = -\vec{F}_и$, а $\left|\vec{F}_и\right| = \left|\vec{N}\right|$.

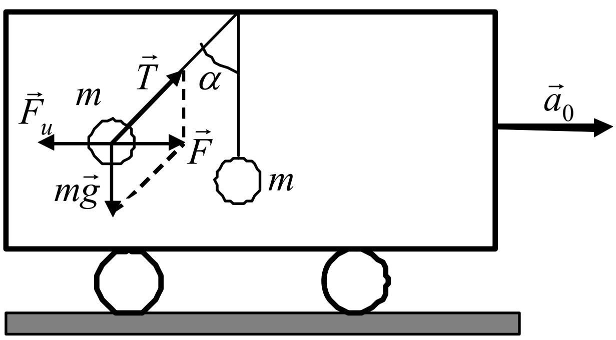
Итак: в неинерциальных системах отсчета законы Ньютона не выполняются. Однако если уравнения движения записать в виде:

$$m\vec{a}_н = \vec{F} + \vec{F}_{ин},$$

где $\vec{a}_н$ – ускорение тела в неинерциальной системе отсчета, $\vec{F}$ – равнодействующая сил, обусловленных воздействием тел друг на друга, $\vec{F}_{ин}$ – сила инерции, то законы Ньютона будут формально выполняться. При этом в уравнение движения кроме реальных сил взаимодействия входят фиктивные силы, которые называются <u>силами инерции</u>. Силы инерции – это силы, действующие в неинерциальной системе отсчета и обусловленные ускоренным движением этой системы.

Рассмотрим три случая проявления сил инерции.

### 11.1.1. Силы инерции в системах отсчета, движущихся поступательно




Пусть к потолку вагона на нити подвешен шарик массы $m$. Пока вагон движется равномерно и прямолинейно (или покоится), сила тяжести и сила реакции нити $\vec{T}$ уравновешивают друг друга, и нить занимает вертикальное положение.

Вагон начал двигаться с ускорением $\vec{a}_0$. Нить отклонится от вертикали на угол $\alpha$. С точки зрения наблюдателя, находящегося в инерциальной системе отсчета (например, на Земле) результирующая сила

$$\vec{F} = m\vec{g} + \vec{T}$$

обеспечит ускорение шарика $\vec{a}_0$:

$$\vec{F} = m\vec{a}_0.$$

С точки зрения наблюдателя, находящегося в неинерциальной системе (в ускоренно движущемся вагоне) шарик покоится, т.е. сила $\vec{F}$ уравновешивается равной и противоположно направленной ей силой $\vec{F}_{ин}$, которая является силой инерции.

Таким образом,

$$\vec{F}_{ин} = -m\vec{a}_0$$

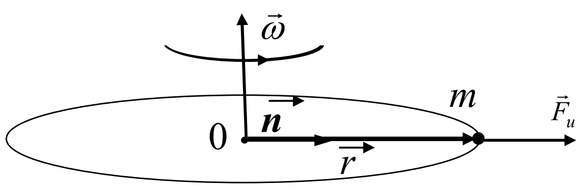
– сила инерции, действующая на тело, равна массе этого тела, умноженной, на ускорение системы отсчета и направлена противоположно ускорению.

Действию сил инерции подвергается, например, пассажир: при резком торможении вагона сила инерции бросает его вперед, при ускорении вагона – назад.

## 11.2. СИЛЫ ИНЕРЦИИ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ТЕЛО, ПОКОЯЩЕЕСЯ ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА

**Система отсчета, вращающаяся относительно инерциальной системы отсчета с угловой скоростью $\vec{\omega}$ является неинерциальной системой отсчета.**

Рассмотрим пример такой неинерциальной системы отсчета. На рисунке изображен вращающийся с угловой скоростью $\vec{\omega}$ диск, на котором находится тело массой $m$. Тело относительно диска покоится.




Относительно инерциальной системы отсчета (относительно точки $O$, относительно Земли) тело движется по окружности и его ускорение равно $\vec{a}_n = \vec{a}_и$, которое направлено к центру окружности.

$\vec{n}$ – единичный орт.

Уравнение движения тела можно записать в виде: $m\vec{a}_и = m\vec{a}_н + m\vec{a}$ или $m\vec{a}_н = m\vec{a}_и + \vec{F}_и$. Тогда $\vec{F}_и = -m(\vec{a}_и - \vec{a}_н)$.

Так как тело $m$ покоится относительно диска (неинерциальной системы отсчета), оно вращается вместе с диском, то

$$\left.\begin{aligned}\vec{a}_н &= 0\\ \vec{a}_и &= -\omega^2 r\cdot\vec{n}\end{aligned}\right\}\quad \text{тогда } \vec{F}_и = m\omega^2 r\cdot\vec{n},\quad \vec{r} = r\cdot\vec{n} \Rightarrow \vec{F}_и = m\omega^2\vec{r}.$$

$\vec{F}_и = m\omega^2\vec{r}$ – сила инерции, действующая на неподвижное относительно вращающейся системы отсчета тело, называется *центробежной силой инерции*. Центробежная сила инерции сообщает телу центробежное ускорение $\vec{a}_{ц.б} = \dfrac{\vec{F}_и}{m} = \omega^2\vec{r}$ .

Свойства центробежной силы инерции:

1) величина центробежной силы инерции ($\vec{F}_и$) зависит от положения тела во вращающейся системе отсчета,
2) центробежная сила инерции направлена по радиусу от центра,
3) величина $\vec{F}_и$ не зависит от скорости тела относительно вращающейся системы отсчета,
4) силы инерции оказывают на тело такое же действие, что и реальные силы, действующие со стороны других тел. Силы инерции - фиктивные силы. Они могут сообщать телу ускорение или совершать работу по изменению положения относительно неинерциальной системы отсчета.

Покажем, что центробежная сила инерции может совершать работу по перемещению тела. Найдем работу центробежной силы при изменении положения тела относительно точки $O$ от $r_1$ до $r_2$:
$dA = (\vec{F}_и d\vec{r})$ или $dA = (m\omega^2\vec{r}\cdot d\vec{r})$. Так как $(\vec{r}\cdot d\vec{r}) = r\cdot dr$, то

$dA = m\omega^2 r\cdot dr$, а при изменении положения от $r_1$ до $r_2$

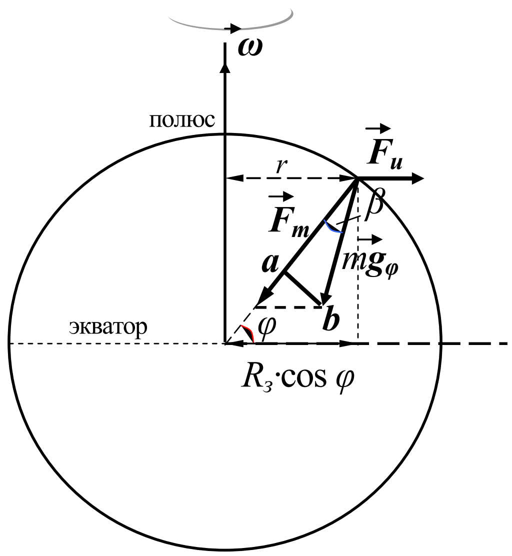
$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} m\omega^2 r\cdot dr = \left.\frac{m\omega^2 r^2}{2}\right|_{r_1}^{r_2} = \frac{m\omega^2\left(r_2^2 - r_1^2\right)}{2}.$$

Обратите внимание на то, что работа силы инерции не зависит от формы траектории движения тела относительно неинерциальной системы отсчета.

Рассмотрим примеры действия центробежных сил инерции.

Пример 1.

На тело, находящееся на поверхности Земли действует центробежная сила инерции, так как Земля вращается вокруг своей оси.




Тело находится на поверхности Земли в точке, определяющейся географической широтой $\varphi$.

Весом тела $\vec{P}$ называется сила, с которой неподвижное тело действует на горизонтальную подставку, на которой лежит, или растягивает вертикальную нить (подвес).

Если тело лежит на подставке, то тело действует на неё с силой $\vec{P}$, а подставка действует на тело с силой $\vec{F}$, направленной противоположно. Силы $\vec{P}$ и $\vec{F}$ – это силы взаимодействия тела и подставки. Они удовлетворяют третьему закону Ньютона $\vec{F} = -\vec{P}$.

Сила $\vec{F}$ – это сила тяжести тела. Тело находится во вращающейся системе отсчета. Земля вращается вокруг своей оси с угловой скоростью $\vec{\omega}$**.** Сила тяжести $\vec{F}$ равна геометрической сумме силы гравитационного взаимодействия тела $\vec{F}_{гр}$ массой $m$ с Землей и центробежной силы инерции $\vec{F}_и$, обусловленной суточным вращением Земли: $\vec{F} = \vec{F}_{гр} + \vec{F}_и$. Из-за действия центробежной силы инерции $\vec{F}_и$, направления силы тяжести $\vec{F}$ и силы гравитационного взаимодействия $\vec{F}_{гр}$ не совпадают. Сила тяжести сообщает свободному телу на поверхности Земли ускорение $\vec{g}_\varphi$, величина которого зависит от положения тела на поверхности Земли (от широты местности φ). Поэтому сила тяжести равна: $\vec{F} = m\vec{g}_\varphi$. Гравитационная сила, равная $\vec{F}_{гр} = -\gamma \dfrac{mM_З}{R_З^3}\vec{R}$, эта сила сообщает телу ускорение, направленное по радиусу к центру Земли: $\vec{g}_0 = -\gamma \dfrac{M_З}{R_З^3}\vec{R}$. Центробежная сила инерции $\vec{F}_и = m\omega^2\vec{r}$ сообщает телу ускорение относительно неинерциальной системы отсчета, связанной с поверхностью Земли $\vec{a}_н = \omega^2\vec{r}$. Тогда $\vec{g}_\varphi = \vec{g}_0 + \vec{a}_н = \vec{g}_0 + \omega^2\vec{r}$. Везде, кроме экватора и полюса Земли, вектор $\vec{g}_\varphi$ не совпадает по направлению с вектором $\vec{g}_0$.

На экваторе векторы $\vec{F}_{гр}$ и $\vec{F}_и$ направлены противоположно друг другу, поэтому ускорение свободного падения на экваторе $g_\varphi = g_0 - \omega^2 R_З$ и численно равно $g_{экв}$=9,780 *м/с*$^2$ ($g_{экв}$ на 0,3% меньше $g_0$). На полюсе Земли центробежная сила инерции равна нулю. Поэтому на полюсе должно быть $g_\varphi = g_П = g_0$= 9,810 *м/с*$^2$. Однако, экспериментально измеренное ускорение свободного падения на полюсе равно $g_П$ = 9,832 *м/с*$^2$. Разница между теоретическими и экспериментальными результатами обусловлена тем, что Земля сплюснута у полюсов, вследствие этого уменьшается расстояние до центра Земли и $g_0$ увеличивается.

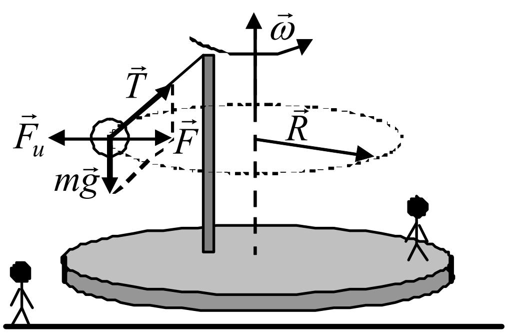
Так как угловая скорость суточного вращения Земли небольшая, то угол $\beta$ между направлениями силы тяжести $\vec{F}$ и силы гравитационного взаимодействия $\vec{F}_{гр}$ мал. Величину угла $\beta$ можно оценить, учитывая, что $\omega^2 R_З$= 0,034 *м/с*$^2$ и $g_\varphi \approx g_0$= 9,81 *м/с*$^2$. Из рисунка видно:

$$|ab| = mg\sin\beta, \qquad |ab| = F_и \sin\varphi = m\omega^2 R_З \cos\varphi \sin\varphi, \text{ тогда}$$

$\sin\beta = \dfrac{\omega^2 R_З \cos\varphi\sin\varphi}{g} = \dfrac{\omega^2 R_З \sin 2\varphi}{2g}$, так как $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, а $T$ =24 *часа*, то $\sin\beta = 0{,}0018\sin 2\varphi.$

Угол $\beta$ на полюсе и на экваторе обращается в ноль, а на любой широте $\varphi$ – $\sin\beta$ малая величина.

Пример 2.




Пусть диск равномерно вращается с угловой скоростью $\vec{\omega}$ вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр. На диске установлен маятник, представляющий собой шарик, массой *m*, подвешенный на нити.

При вращении диска шарик отклоняется от вертикали на некоторый угол. С точки зрения наблюдателя, находящегося в инерциальной системе отсчета, например, в комнате, где установлен диск, шарик вращается по окружности радиуса *R*. Следовательно, на него действует центростремительная сила $\vec{F}$, направленная перпендикулярно оси вращения. Эта сила $\vec{F}$ является равнодействующей сил $m\vec{g}$ и $\vec{T}$ и равна:

$$F = m\omega^2 R\,.$$

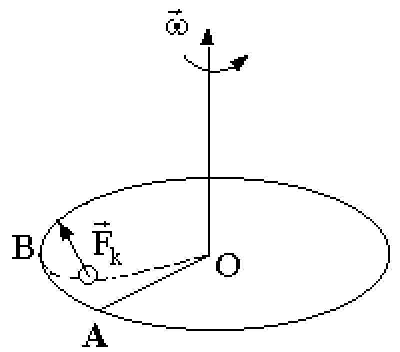
С точки зрения наблюдателя, находящегося на диске, то есть в неинерциальной системе отсчета, шарик покоится, так как сила $\vec{F}$ уравновешивается равной и противоположно направленной ей силой $\vec{F}_и$, которая является центробежной силой инерции:

$$F_и = m\omega^2 R\,.$$

Центробежная сила инерции действует на тело в направлении радиуса от оси вращения. Действию центробежных сил инерции подвергаются, например, пассажиры в движущемся транспорте на поворотах; центробежные силы инерции используются во всех центробежных механизмах: насосах, сепараторах, и т.д.

## 11.3. СИЛЫ ИНЕРЦИИ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ТЕЛО, ДВИЖУЩЕЕСЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

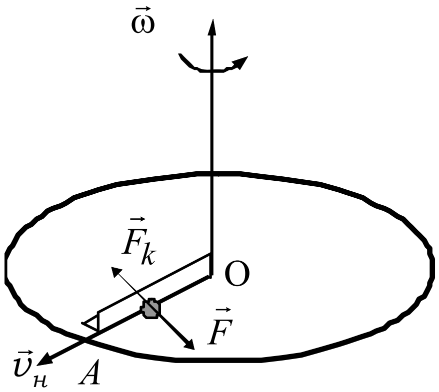
Если тело движется в неинерциальной системе отсчета, то кроме центробежной силы инерции действует еще одна сила инерции – сила Кориолиса $\vec{F}_к$. Появление силы Кориолиса можно обнаружить на следующем примере.




Пусть шарик массы $m$ движется с постоянной скоростью $\vec{\upsilon}$ вдоль радиуса диска. Если при этом диск покоится, то шарик попадает в точку А. Если же диск привести во вращение в направлении, указанном стрелкой, то шарик покатится по кривой $OB$. Т.е. скорость шарика относительно диска изменит свое направление. Это значит, что во вращающейся системе отсчета на шарик действует сила $\vec{F}_к$, перпендикулярная скорости $\vec{\upsilon}$.

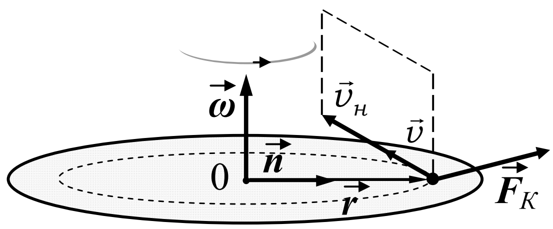
Чтобы заставить шарик катится по вращающемуся диску вдоль радиуса, нужно сделать направляющую, например, в виде ребра $OA$.

При качении шарика ребро действует на него с некоторой силой $\vec{F}$. Относительно диска (вращающейся системы отсчета) шарик движется равномерно и прямолинейно. Это можно объяснить тем, что сила $\vec{F}$




уравновешивается приложенной к шарику силой инерции. Эта сила инерции называется силой Кориолиса $\vec{F}_к$. Сила Кориолиса возникает, если тело движется относительно вращающейся системы отсчета.

Рассмотрим пример. На рисунке изображен вращающийся с угловой скоростью $\vec{\omega}$ диск, по которому движется тело массой $m$ со скоростью $\vec{\upsilon}_н$ относительно диска.




$\vec{\upsilon}_н$ – скорость движения материальной точки относительно вращающейся (неинерциальной) системы отсчета. Направление $\vec{\upsilon}_н$ произвольное.

Рассмотрим движение точки относительно инерциальной системы отсчета.

Скорость тела относительно инерциальной системы отсчета: $\vec{\upsilon}_и = \vec{\upsilon}_н + \vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_н + [\vec{\omega} \cdot \vec{r}]$, так как $\vec{\upsilon} = [\vec{\omega} \cdot \vec{r}]$ – это скорость, которую имеет тело, так как оно находится на расстоянии $r$ от оси вращающегося с угловой скоростью ω диска. Тело при движении описывает окружность, поэтому согласно второму закону Ньютона можно записать:

$$-\frac{m\upsilon_и^2}{r}\vec{n} = -\frac{m\ (\vec{\upsilon}_н + [\vec{\omega} \cdot \vec{r}])^2}{r}\vec{n} = -\frac{m\upsilon_н^2}{r}\vec{n} - \frac{2m\ (\vec{\upsilon}_н \cdot [\vec{\omega} \cdot \vec{r}])}{r}\vec{n} - \frac{m[\vec{\omega} \cdot \vec{r}]^2}{r}\vec{n}.$$

Учтем, что $\vec{\upsilon} = [\vec{\omega} \cdot \vec{r}]$, тогда

$$\frac{m[\vec{\omega} \cdot \vec{r}]}{r} = \frac{m\upsilon^2}{r} = \frac{m\omega^2 r^2}{r} = m\omega^2 r;$$

$$\frac{2m(\vec{\upsilon}_н \cdot [\vec{\omega} \cdot \vec{r}])}{r} = \frac{2m([\vec{\upsilon}_н \cdot \vec{\omega}] \cdot \vec{r})}{r} = 2m([\vec{\upsilon}_н \cdot \vec{\omega}] \cdot \vec{n}),$$ так как $\frac{\vec{r}}{r} = \vec{n}$ – единичный вектор (орт) радиус-вектора.

Тогда движение тела относительно инерциальной системы отсчета можно записать: $-\frac{m\upsilon_и^2}{r} \cdot \vec{n} = -\frac{m\upsilon_н^2}{r} \cdot \vec{n} - 2m([\vec{\upsilon}_н \cdot \vec{\omega}] \cdot \vec{n} \cdot \vec{n}) - m\omega^2 r \cdot \vec{n}$.

А уравнение движения тела относительно неинерциальной системы отсчета:

$$-\frac{m\upsilon_н^2}{r}\cdot\vec{n} = -\frac{m\upsilon_и^2}{r}\cdot\vec{n} + 2m[\vec{\upsilon}_н\cdot\vec{\omega}] + m\omega^2 r\cdot\vec{n}.$$

Так как относительно инерциальной системы отсчета можно записать второй закон Ньютона в виде: $\vec{F} = m\vec{a}_и = -\frac{m\upsilon_и^2}{r}\cdot\vec{n}$, где $\vec{F}$ – реальные силы, действующие на тело относительно инерциальной системы отсчета. В неинерциальной вращающейся системе отсчета на тело действует центробежная сила инерции $\vec{F}_и = m\omega^2 r\cdot\vec{n}$, $\vec{r} = r\cdot\vec{n} \Rightarrow \vec{F}_и = m\omega^2\vec{r}$, которая обусловлена вращением неинерциальной системы отсчета относительно инерциальной. Тогда $2m[\vec{\upsilon}_н\cdot\vec{\omega}] = \vec{F}_к$ – сила инерции (сила Кориолиса), обусловленная скоростью движения тела относительно неинерциальной вращающейся системы отсчета.

Уравнение движения тогда можно записать: $m\vec{a}_н = m\vec{a}_и + \vec{F}_к + \vec{F}_и$.

Таким образом, если тело (материальная точка) движется относительно вращающейся (неинерциальной) системы отсчета со скоростью $\vec{\upsilon}_н$, тело кроме центробежной силы инерции действует ещё сила Кориолиса, равная $\vec{F}_к = 2m[\vec{\upsilon}_н\cdot\vec{\omega}]$.

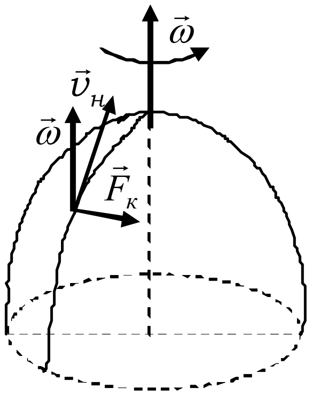
Свойства силы Кориолиса:

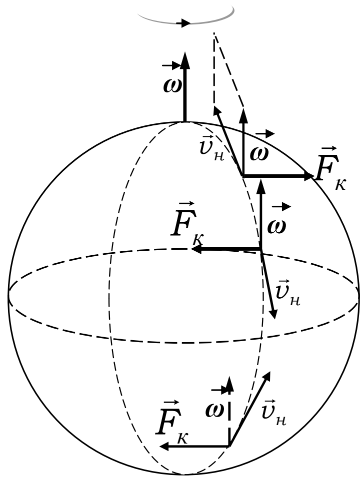
1) величина силы Кориолиса $F_K$ не зависит от положения материальной точки во вращающейся системе отсчета,

2) сила Кориолиса $\vec{F}_к$ зависит от скорости $\vec{\upsilon}_н$ относительно вращающейся системы отсчета и угловой скорости вращения системы относительно инерциальной системы отсчета,

3) сила Кориолиса всегда направлена перпендикулярно $\vec{\upsilon}_н$ скорости движения тела относительно вращающейся системы отсчета, то есть $\vec{F}_K \perp \vec{\upsilon}_н$, поэтому сила Кориолиса работы не совершает. Эта сила называется *гироскопической*.

Вектор $\vec{F}_к$ перпендикулярен вектору скорости $\vec{\upsilon}_н$ тела и угловой скорости вращения $\vec{\omega}$ системы отсчета в соответствии с правилом правого винта.




Действием сил Кориолиса объясняется ряд наблюдаемых на Земле явлений. Например, если тело движется в северном полушарии на север, то действующая на него сила Кориолиса будет направлена вправо по отношению к направлению движения. Поэтому в северном полушарии наблюдается более сильное подмывание правых берегов рек. За счет действия силы Кориолиса, возникает дополнительная сила бокового давления, с которой поезд действует на рельсы, поэтому правые рельсы железнодорожных путей по движению изнашиваются быстрей, чем левые. Свободно падающее тело отклоняется к востоку и т.д.

Аналогично можно показать, что в южном полушарии сила Кориолиса будет направлена влево по отношению к направлению движения.

## 11.4. ОСОБЕННОСТИ СИЛ ИНЕРЦИИ

Силы инерции нельзя ставить в один ряд с такими механическими силами, как упругие, гравитационные и силы трения, то есть силами, обусловленными воздействием на тело со стороны других тел. В отличие от «обычных» сил, силы инерции вызваны не взаимодействием тел, а ускоренным движением системы отсчета. **Нельзя указать тело, со стороны которого действует сила инерции.** Поэтому к этим силам неприменим третий закон Ньютона. В этом смысле силы инерции можно рассматривать, как фиктивные силы.

Силы инерции вводятся для того, чтобы иметь возможность описывать поведение тела в неинерциальной системе отсчета, пользуясь законами Ньютона.

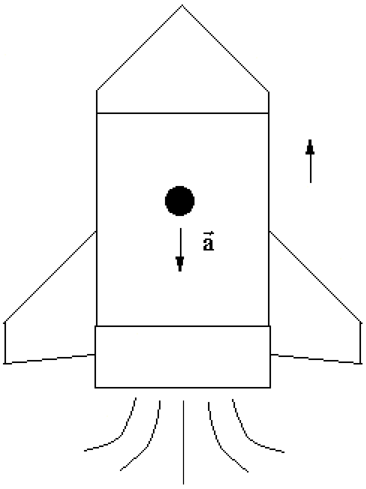
**Силы инерции действует только в неинерциальных системах отсчета.**

Для тела, находящегося в неинерциальной системе отсчета, силы инерции являются **внешними**, следовательно, здесь нет замкнутых систем. Это означает, что в неинерциальных системах **не выполняются законы сохранения**.

## 11.5. ПРИНЦИП ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ СИЛ ИНЕРЦИИ И СИЛ ТЯГОТЕНИЯ

Силы инерции также как и силы тяготения пропорциональны массе тела, на которое они действуют. Значит, обе эти силы сообщают одной и той же массе одинаковые ускорения. Поэтому, наблюдая в данной системе отсчета за движением тел и не зная, как эта система движется, нельзя отличить силу инерции от силы тяготения.

Рассмотрим следующий пример. Если в лаборатории, находящейся на Земле, выпустить из рук предмет, то он будет падать вниз под действием земного притяжения с ускорением $\vec{g}$. А теперь вынесем лабораторию в космос, подальше от гравитационного притяжения Земли и поместим ее в ускоренно движущейся ракете. Если ускорение ракеты по модулю равно $\vec{g}$, то есть $|\vec{a}| = |\vec{g}|$, то пол будет ускоряться в направлении предмета. Наблюдатель в ракете увидит движение предмета относительно пола с ускорением $\vec{g}$. Если лаборатория лишена окон, то наблюдатель никогда не сможет отличить ускорения, созданного силой тяжести от ускорения, созданного движением ракеты.




Итак, все физические явления в инерциальной системе отсчета, находящейся в однородном поле тяжести, и в неинерциальной системе, движущейся с постоянным ускорением, происходят совершенно одинаково.

Это положение называется <u>принципом эквивалентности сил инерции и сил тяготения</u> (принципом эквивалентности Эйнштейна).

Этот принцип является основой общей теории относительности.

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое неинерциальная система отсчета?
2. Запишите и поясните основной закон динамики для неинерциальной системы отсчета.

3. Когда проявляются центробежная сила инерции и сила Кориолиса? Приведите примеры.

4. Сформулируйте и поясните на примере принцип эквивалентности Эйнштейна.

## Слова и выражения

Аналогично
Бросать
Вертикальный
Кроме *чего?*
Маятник
Насос
Особенность
Пассажир
Поведение
Повешен, -а, -о, -ы
Подвергаться *чему?*
Полушарие
Пусть
Разместить
Резкий
Сепаратор
Сохранение
Ставить в один ряд
Торможение
Уравновешиваться

## ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ФОРМУЛЫ ПО РАЗДЕЛУ «МЕХАНИКА»

Механическим движением называется изменение положения тела в пространстве с течением времени.

### Кинематика

Кинематика – раздел механики, в котором изучаются способы описания движения тел, без выяснения причин, вызвавших это движение.

**Модель** – абстрактное представление тела, физического явления, которое является упрощенной копией реального тела, системы.

Простейшей моделью является <u>материальная точка.</u> **Это тело, размерами которого при данных условиях можно пренебречь (то есть можно не учитывать).**

**Тело, по отношению к которому рассматривается движение других тел, называется <u>телом отсчета.</u>** *Тело отсчета* – условно неподвижное тело, относительно которого определяется положение движущегося тела.

**Совокупность тела отсчета и часов называется <u>системой отсчета.</u>** С системой отсчета связывают систему координат.

Движение материальной точки определяется скалярными уравнениями

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t),$$

или векторным уравнением $\vec{r} = \vec{r}(t)$ – кинематические уравнения движения. **Линия, описываемая точкой при движении в пространстве, называется <u>траекторией</u> точки.**

**Вектор $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, проведенный из начального положения точки в конечное положение, называется <u>вектором перемещения</u> или <u>перемещением</u>.**

1. **<u>Средней скоростью перемещения</u>** $\langle\vec{v}\rangle$ называется отношение приращения $\Delta\vec{r}$ радиус-вектора точки к промежутку времени $\Delta t$: $\langle\vec{v}\rangle = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$.
2. **Мгновенная скорость – это скорость точки в данный момент времени в данной точке траектории:** $\vec{v} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$. Мгновенная скорость – это вектор, поэтому

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}.$$

$\frac{dx}{dt} = \upsilon_x$; $\frac{dy}{dt} = \upsilon_y$; $\frac{dz}{dt} = \upsilon_z$ – проекции вектора скорости на оси координат.

$$|\upsilon| = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}.$$

3. **Средняя скорость пути (средняя путевая скорость):** $\langle \upsilon \rangle = \frac{\Delta S}{\Delta t}$. **Ускорение характеризует быстроту изменения скорости по величине и направлению.**

1. **<u>Средним ускорением</u> в интервале от $t$ до $t + \Delta t$ называется векторная величина, равная отношению вектора изменения скорости $\Delta\vec{\upsilon}$ к интервалу времени $\Delta t$:**

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta\,\vec{\upsilon}}{\Delta\,t}.$$

2. **<u>Мгновенным ускорением</u> называется величина**

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}.$$

**Ускорение** материальной точки – это первая производная от вектора скорости по времени или вторая производная от радиус-вектора по времени.

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},$$

где $a_x, a_y, a_z$ – проекции вектора ускорения на координатные оси.

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}; \quad a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}; \quad a_z = \frac{d\upsilon_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Полное ускорение

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{v}_\tau}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{v}_n}{\Delta t} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n,$$

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n.$$

Составляющая ускорение $\vec{a}_\tau$ называется **<u>тангенциальным ускорением</u>. Оно характеризует быстроту изменения скорости по величине.** Его численное значение равно первой производной по времени от модуля скорости:

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}.$$

Составляющая ускорения $\vec{a}_n$ называется <u>нормальным ускорением</u>. **Оно характеризует быстроту изменения скорости по направлению.** Нормальное ускорение направлено по радиусу к центру кривизны траектории: $a_n = \frac{\upsilon^2}{R}$.

**<u>Абсолютно твердым телом</u> называется тело, деформациями которого можно пренебречь в условиях данной задачи.**

$\varphi = \varphi\ (t)$ – кинематическое уравнение вращательного движения.

**1. Вектор углового перемещения: $\Delta\vec{\varphi}$ – это вектор, определяющий, как вращается твердое тело.**

**2. Средняя угловая скорость – это физическая величина равная отношению вектора углового перемещения к промежутку времени, за который это перемещение произошло:** $\vec{\omega}_{cp} = \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t}$.

**3. Мгновенная угловая скорость – это угловая скорость в данный момент времени.** $\vec{\omega} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$,

$$\vec{\omega} \uparrow\uparrow d\vec{\varphi}, \quad [\omega] = \frac{рад}{сек}.$$

**Векторная величина, равная первой производной от угла поворота тела по времени, называется мгновенной <u>угловой скоростью</u>.**

**4. Среднее угловое ускорение – это физическая величина, равная отношению вектора изменения угловой скорости к промежутку времени, за который это изменение произошло:** $\vec{\varepsilon}_{cp} = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}$.

**Мгновенное угловое ускорение – это физическая величина, равная отношению вектора элементарного изменения угловой скорости к промежутку времени, за который это изменение произошло:**

$$\vec{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

**5. Связь между линейными и угловыми характеристиками:** $\vec{v} = \left[\vec{\omega}\vec{R}\right]$, $\quad \vec{a}_\tau = \left[\vec{\varepsilon}\vec{R}\right]$, $\quad \vec{a}_n = -\omega^2\vec{R}$.

## Динамика

**Динамика** изучает законы движения тел и причины, которые вызывают или изменяют это движение.

**Влияние тел (или частиц) на движение друг друга называют взаимодействием.**

**Мера механического воздействия на тело со стороны других тел, в результате, которого данное тело получает ускорение или деформируется, называется <u>силой</u> $\vec{F}$.**

**Закон инерции**: всякая материальная точка (тело) сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока воздействие со стороны других тел не заставит её изменить это состояние.

Характер движения зависит от выбора системы отсчета. Одно и то же движение в разных системах отсчета выглядит по-разному.

**Существуют такие системы отсчета, в которых свободная материальная точка движется равномерно и прямолинейно из любого начального положения в любом направлении.**

Способность тел сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного называется инертностью. Мерой инертности тела является физическая величина, называемая **массой тела.**

**<u>Первый закон Ньютона</u> формулируется следующим образом: всякое тело находится в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока воздействие со стороны других тел не заставит его изменить это состояние.**

**<u>Второй закон Ньютона</u>** устанавливает количественную связь между силой, действующей на тело, и его ускорением: **ускорение, которое приобретает тело, прямо пропорционально действующей на него силе и обратно пропорционально массе этого тела:** $\vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m}$.

**Принцип независимого действия сил**: если на материальную точку действует одновременно несколько сил, то каждая из этих сил сообщает материальной точке ускорение согласно второму закону Ньютона, как будто других сил нет.

**Третий закон Ньютона утверждает: силы, с которыми два тела действуют друг на друга, всегда равны по модулю и противоположны по направлению:** $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.

Закон всемирного тяготения: два тела (материальные точки) притягиваются с силой, пропорциональной их массам и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними: $F_{гр} = \gamma \dfrac{m_1 m_2}{r_{12}^2}$.

Закон Гука: $\vec{F}_{упр} = -k\Delta\vec{\ell}$.

Сила трения скольжения равна: $F_{тр.ск} = \mu F_n = \mu \cdot N$.

**Механический принцип относительности (принцип относительности Галилея): уравнения динамики не изменяются при переходе от одной инерциальной системы к другой.**

Элементарной работой силы $\vec{F}$ на перемещении $d\vec{r}$ называется скалярная величина: $dA = \left(\vec{F} \cdot d\vec{r}\right) = F\cos\alpha \cdot dS = F_S dS$.

Работа $A$, совершаемая силой $\vec{F}$ на конечном перемещении материальной точки из положения 1 в положение 2, равна: $A = \int\limits_1^2 \left(\vec{F} d\vec{r}\right) = \int\limits_1^2 F_S dS$.

**Работа силы тяжести не зависит от формы траектории движения тела, а определяется только ее координатой $z$ в начальном и конечном положении:** $A = \int\limits_1^2 \delta A = \int\limits_1^2 (m\vec{g} \cdot d\vec{r}) = -\int\limits_{z_1}^{z_2} mg \cdot dz = mg(z_1 - z_2)$.

**Работа гравитационной силы не зависит от формы траектории, а определяется только начальным и конечным положением тела относительно другого тела:** $A = \int\limits_1^2 \delta A = \int\limits_1^2 (\vec{F}_{гр} d\vec{r}) = -\int\limits_{r_1}^{r_2} \gamma \dfrac{Mm}{r^2} dr = \gamma Mm \cdot (\dfrac{1}{r_2} - \dfrac{1}{r_1})$.

**Работа упругой силы на конечно пути зависит только от начальной $x_1$ и конечной $x_2$ координат точки приложения силы:** $A = \int\limits_1^2 (-k\vec{r} d\vec{r}) = -\int\limits_{x_1}^{x_2} kx dx = \dfrac{k}{2}(x_1^2 - x_2^2)$.

**Работа силы трения зависит от длины пройденного телом пути $S$, и, следовательно, зависит от формы траектории:** $A = \int\limits_1^1 \delta A = \int (\vec{F}_{тр.ск} d\vec{r}) = -\int\limits_1^2 kmg \cdot ds = -kmgS$.

**Силы, работа которых не зависит от формы траектории, а определяется только начальным и конечным положением относительно других тел, называются консервативными.**

**Уравнения** $A_{1-2} = \Delta E_к$ **и** $\delta A = dE_к$ **называются теоремами об изменении кинетической энергии** (в интегральной и дифференциальной формах соответственно).

**Потенциальной энергией материальной точки в точке** $N$ **консервативного поля называется работа сил поля, совершаемая при перемещении материальной точки из точки** $N$ **в точку** $O$**, принятую за начало отсчета потенциальной энергии:** $E_П = \int\limits_N^O (\vec{F} d\vec{r})$.

**Уравнения** $A = -\Delta E_П$ **и** $\delta A = -dE_П$ **определяют связь работы консервативных сил с изменением потенциальной энергии поля (в интегральной и дифференциальной формах соответственно).**

**Тело, находящееся в поле консервативных сил, обладает потенциальной энергией** $E_П$ **относительно нулевого уровня потенциальной энергии.**

Градиентом скалярной функции $E_П(x,y,z)$ называется векторная функция, которая по определению равна: $\overrightarrow{grad} E_П = \frac{\partial E_П}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_П}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_П}{\partial z}\vec{k}$. Градиент представляет собой оператор, то есть правило, по которому всякой скалярной функции $E_П(x,y,z)$ ставится в соответствие векторная функция тех же переменных.

**Градиент скалярной функции указывает направление наиболее быстрого возрастания функции.**

$\vec{F} = -\left(\frac{\partial E_П}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_П}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_П}{\partial z}\vec{k}\right)$ – связь между силой и потенциальной энергией.

**Полной механической энергией** $E$ **материальной точки называется сумма ее кинетической и потенциальной** $E_П$ энергии: $E = E_K + E_П = \frac{m\upsilon^2}{2} + E_П$.

**Если на материальную точку (тело) действуют только консервативные силы, ее полная механическая энергия с течением времени не изменяется (сохраняется):**

$$E = E_K + E_П = \frac{m\upsilon^2}{2} + E_П = const.$$

**Если материальная точка находится в силовом поле, в котором действуют только консервативные силы, то полная механическая энергия материальной точки не изменяется со временем** $E = const$**. Консервативные силы не могут изменить полную механическую энергию материальной точки в процессе движения.**

**Работа диссипативных сил** $A_{1\text{-}2дис}$ **при перемещении материальной точки из произвольного начального положения в произвольное конечное положение равна приращению полной механической энергии материальной точки:** $A_{1-2дис} = E_2 - E_1$.

Величина, равная произведению массы материальной точки на квадрат кратчайшего расстояния ее до данной оси, называется моментом инерции материальной точки относительно оси: $I_i = m_i r_i^2$.

Теорема Гюйгенса-Штейнера: **момент инерции тела** $I$ **относительно произвольной оси равен моменту его инерции** $I_c$ **относительно параллельной ей оси, проходящей через центр масс** $C$ **тела, сложенному с произведением массы тела** $m$ **на квадрат расстояния** $a$ **между осями:** $I = I_c + ma^2$.

$E_K = \dfrac{I\omega^2}{2}$ – кинетическая энергия вращательного движения.

$\vec{M} = \left[\vec{r}\vec{F}\right]$ – момент силы.

$\vec{M} = I\vec{\varepsilon}$ – основное уравнение динамики вращательного движения.

**Момент импульса твердого тела относительно оси равен произведению момента инерции тела относительно этой же оси на угловую скорость:** $L = \sum\limits_i m_i r_i^2 \omega = \omega \sum\limits_i m_i r_i^2 = I\omega$.

**Импульс замкнутой системы сохраняется, то есть не изменяется с течением времени:** $\vec{P} = const$.

$\vec{r}_c = \dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i$ – положение центра масс системы материальных точек.

Уравнение движения центра масс системы: **центр масс системы частиц движется так, как двигалась бы материальная точка, в которой сосредоточена масса всей системы под действием всех приложенных к системе внешних сил:** $\vec{F} = m\vec{a}_c$.

$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_P$ – уравнение движения тела с переменной массой (уравнение Мещерского).

$\upsilon = u \ln\left( {m_0}/{m} \right)$ – формулы Циолковского.

**Полная механическая энергия замкнутой системы, в которой действуют только консервативные силы, сохраняется, то есть не изменяется со временем:** $E_k + E_П = const$.

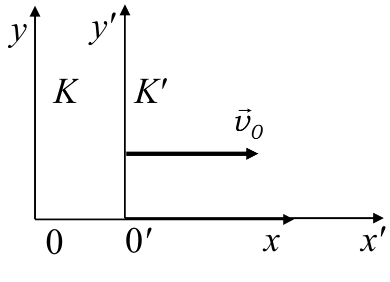
**Закон изменения полной механической энергии системы материальных точек: работа сторонних сил** $A_{1-2стор}$ **при переходе системы материальных точек (тел) из произвольного начального положения в произвольное конечное положение равна приращению полной механической энергии системы:** $A_{1-2стор} = E_2 - E_1$.

Закон сохранения момента импульса: **момент импульса замкнутой системы сохраняется, т.е. не изменяется с течением времени**: $\vec{L} = const$.

**Напряженность поля численно равна отношению силы тяготения, действующей на тело, к массе этого тела:** $\vec{G} = \dfrac{\vec{F}}{m}$.

Потенциалом поля тяготения называется скалярная величина $\varphi = \dfrac{E_П}{m}$,

равная потенциальной энергии, которой обладает тело единичной массы в данной точке поля.




$$\left.\begin{aligned} x &= \upsilon_{0x} t + x', \\ y &= y', \\ z &= z', \\ t &= t'. \end{aligned}\right.$$ – преобразования Галилея.

## Специальная теория относительности

**Постулаты Эйнштейна:**

1. **Первый постулат.** Принцип относительности: никакие опыты (механические, электрические, оптические), проведённые внутри данной инерциальной системы отсчёта, не дают возможности обнаружить, покоится эта система или движется равномерно и прямолинейно. Все

законы природы инвариантны, то есть не меняются при переходе от одной системы отсчёта к другой.

2. **Второй постулат.** Независимость скорости света от скорости источника: скорость света в вакууме не зависит от скорости движения источника света или наблюдателя и одинакова во всех инерциальных системах отсчёта.

Преобразования Лоренца:

Прямые преобразования $K \to K'$:

$$x' = \frac{x - \upsilon t}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$y' = y,$$

$$z' = z,$$

$$t' = \frac{t - x\frac{\upsilon}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Обратные преобразования $K' \to K$:

$$x = \frac{x' + \upsilon t'}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$y = y',$$

$$z = z',$$

$$t = \frac{t' + x'\frac{\upsilon}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

$\vec{F} = \dfrac{d\vec{P}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)$ – основное уравнение релятивистской динамики.

**Приращение кинетической энергии частицы пропорционально приращению её релятивистской массы**:

$$dE_k = c^2 dm = c^2 \cdot d\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}\right).$$

$E^2 = m_0^2c^4 + p^2c^2 \quad \Rightarrow E = \sqrt{m_0^2c^4 + p^2c^2}$ – связь полной энергии и импульса.

$p = \dfrac{1}{c}\sqrt{E_k\left(2E_0 + E_k\right)}$ – связь импульса и кинетической энергии релятивистской частицы.

## Неинерциальные системы отсчета

**Системы отсчета, которые движутся относительно инерциальных систем с ускорением, называются <u>неинерциальными</u>.**

**Произведение массы тела на его ускорение относительно неинерциальной системы отсчета равно векторной сумме сил взаимодействия сложенной с силой инерции – уравнение движения тел в неинерциальных системах отсчета:** $m\vec{a}_н = \vec{F} + \vec{F}_и$.

$\vec{F}_и = m\omega^2\vec{r}$ – сила инерции, действующая на неподвижное относительно вращающейся системы отсчета тело, называется *центробежной силой инерции*.

Если тело (материальная точка) движется относительно вращающейся (неинерциальной) системы отсчета со скоростью $\vec{\upsilon}_н$, тело кроме центробежной силы инерции действует ещё сила Кориолиса, равная $\vec{F}_к = 2m[\vec{\upsilon}_н \cdot \vec{\omega}]$.

# МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

## Лекция 12

## МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

Термины и понятия

Абсолютная температура газа
Вакуум
Длина свободного пробега
Законы идеального газа
Идеальный газ
Изобара
Изобарический процесс
Изотерма
Изотермический процесс
Изохора
Изохорический процесс
Объект исследования
Постоянная
Разреженный
Силы взаимодействия
Статистический метод (молекулярно-кинетический)
Термический коэффициент
Термодинамический метод
Универсальная газовая постоянная
Ультраразреженный
Форвакуум
Шкала Кельвина
Шкала Цельсия

### 12.1. ВВЕДЕНИЕ

Молекулярная физика и термодинамика – разделы физики, изучающие макроскопические процессы в телах, связанные с огромным числом содержащихся в них атомов и молекул.

Для исследования этих процессов применяются два различных, но взаимодополняющих друг друга метода: статистический и термодинамический.

Термодинамический метод широко применяется в термодинамике. Этот метод рассматривает тело (газ, жидкость, твёрдое вещество), как систему в целом. *Термодинамическая система* – совокупность макроскопических тел, которые обмениваются энергией, как между собой, так и с внешними телами (внешней средой).

Состояние термодинамической системы характеризуется (задаётся) совокупностью физических величин (параметров состояния), называемых *макроскопическими термодинамическими параметрами*: $p$, $T$, $V$, $m$. Если термодинамические параметры с течением времени не меняются, то говорят, что система находится в состоянии термодинамического равновесия – $p = const$, $T = const$.

Для анализа состояния системы используется *уравнение состояния*: $p = f(V,T)$ – функциональная зависимость равновесного давления от других термодинамических параметров. Термодинамический метод не рассматривает поведение отдельных молекул, составляющих тело (входящих в систему).

Термодинамический метод отвечает на вопрос, как происходит процесс, но механизм данного процесса он не раскрывает.

Ответ на вопрос, почему данный процесс происходит именно таким образом, даёт статистический (или молекулярно-кинетический) метод. Явления, в которых участвует огромное число частиц (атомов или молекул), подчиняются законам статистики. В основе статистического метода лежат следующие утверждения: 1) совокупность (коллектив) огромного числа молекул имеет такие свойства, каких нет у каждой отдельной молекулы, например, нельзя говорить о температуре одной молекулы, 2) существует количественная связь между свойствами коллектива молекул, (такие свойства называются макроскопическими) и средними значениями микроскопических величин. Микроскопические величины характеризуют поведение и свойства каждой молекулы в отдельности, но так как молекул очень много, то можно говорить о средних значениях микроскопических величин. В основе лежит модель, которая описывается уравнениями теории вероятности и математической статистики.

Основываясь на молекулярно-кинетических представлениях о веществе (все тела состоят из молекул, находящихся в непрерывном хаотическом движении), сформулированы *статистические распределения*:

1. распределение молекул по объёму (без внешних полей),
2. распределение молекул по скоростям – распределение Максвелла,
3. распределение молекул по потенциальным энергиям – распределение Больцмана,
4. закон равномерного распределения энергии по степеням свободы.

Из этих распределений получают средние значения физических величин, которые характеризуют состояние системы.

Итак, статистический метод рассматривает коллектив (совокупность) огромного числа частиц (молекул, атомов) и изучает законы поведения этого коллектива частиц.

Таким образом, термодинамический и молекулярно-кинетический методы дополняют друг друга, методы различны, а объект исследования – один и тот же.

## 12.2. ЗАКОНЫ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

Простейшим объектом исследования в молекулярно-кинетической теории является идеальный газ. **Идеальным газом называется газ, для которого выполнены следующие условия:**

1. Молекулы газа находятся друг от друга на расстояниях настолько больших, что можно пренебречь линейными размерами молекул, по сравнению с этими расстояниями, то есть мы пренебрегаем собственным объёмом молекул.

2. Между молекулами нет сил взаимодействия. Силы взаимодействия появляются только в момент столкновения, причём столкновение является абсолютно упругим.

Идеальный газ – это абстракция, но очень многие газы при обычных условиях близки к идеальному газу.

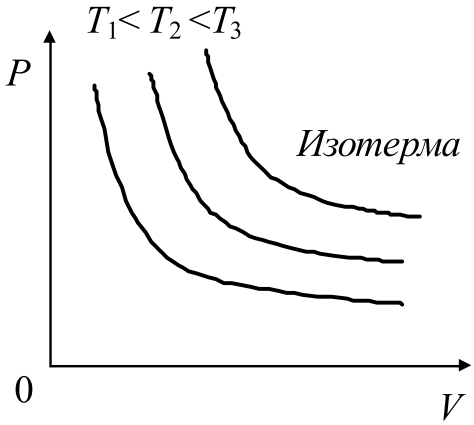
Состояние данной массы газа характеризуют его параметрами: объемом *V,* давлением *P* и температурой *T*. **Законы, которые устанавливают взаимосвязь этих параметров при разных состояниях газа, называются газовыми законами.**

Переход системы из одного состояния в другое называется **процессом**. Уравнение, описывающее переход системы из одного состояния в другое называется уравнением процесса.

**Изопроцесс – процесс, при котором один из макропараметров состояния данной массы газа остается постоянным.**

Рассмотрим экспериментальные газовые **законы идеального газа.**

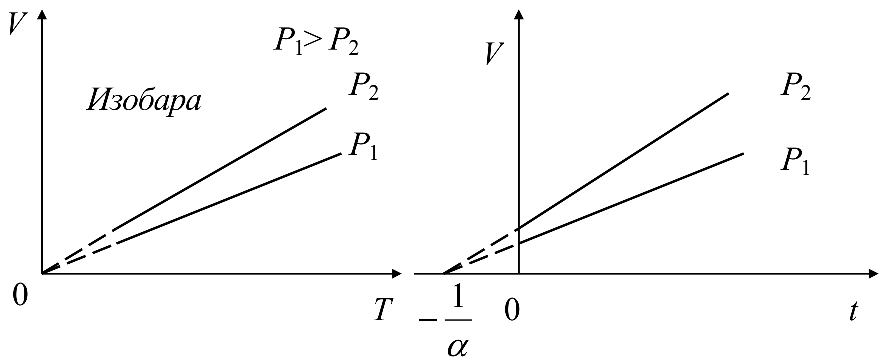
1. **Закон Бойля–Мариотта** справедлив для изотермических процессов. Изотермический (или изотермный) процесс – это процесс, идущий при постоянной температуре. Закон Бойля-Мариотта утверждает, что для данной массы газа при постоянной температуре произведение давления газа на его объём есть величина постоянная. Математически это записывается так:




$$PV = const\text{, при}$$
$$m = const,\ \ T = const.$$

На графике представлена зависимость $P$ от $V$, кривая называется изотермой.

2. **Закон Гей–Люссака** справедлив для изобарических (изобарных) процессов. Изобарический процесс – это процесс, при котором давление газа остаётся постоянным.




Закон Гей–Люссака утверждает, что объём данной массы газа при постоянном давлении меняется линейно с температурой. Математическая формулировка этого закона:

$$V = V_0(1+\alpha t) \text{ при } P = const,$$

где $V$ – объём газа при температуре $t$, взятой по шкале Цельсия, $V_0$ – объём газа при $0°\,C$, $\alpha$ – коэффициент объёмного расширения газа, $\alpha = \dfrac{1}{273} K^{-1}$.

На графике в координатах $V$, $t$ мы видим прямую, которая называется изобарой. Закон Гей-Люссака может иметь другую математическую формулировку:

$$\frac{V}{T} = const \text{ при } P = const,$$

где $V$ – объём газа при температуре $T$, взятой по шкале Кельвина.

Температура по шкале Кельвина связана с температурой по шкале Цельсия соотношением $T = t+273$.

3. **Закон Шарля** справедлив для изохорических (изохорных) процессов. Изохорический процесс – это процесс, при котором объём газа остаётся постоянным. Закон Шарля читается так: давление данной массы газа при постоянном объёме меняется линейно с температурой.

Математическая формулировка этого закона:

$$P = P_0(1+\beta t) \text{ при } V = const,$$

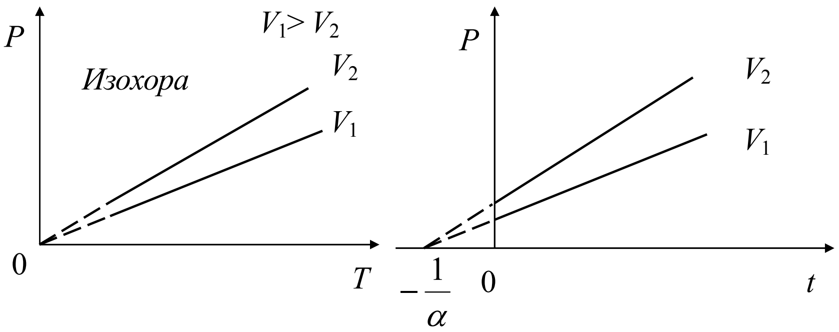
где $P$ – давление газа при температуре $t$, взятой по шкале Цельсия, $P_0$ - давление газа при 0° $C$, $\beta$ – термический коэффициент. $\beta \cong \frac{1}{273}$ К$^{-1}$.

Зависимость $P$ от $t$ выражается прямой линией, которая называется изохорой.

Закон Шарля может иметь другую математическую формулировку:

$$\frac{P}{T} = const \text{ при } V = const,$$

где $P$ – давление газа при температуре $T$, взятой по шкале Кельвина.




4. **Закон Авогадро** – 1 *моль* любого газа при нормальных условиях занимает объём $V_0 = 22{,}4$ *л.* Нормальные условия $P_0 = 1{,}013 \cdot 10^5\, Па$, $T_0 = 273{,}15K$. Любые газы, взятые в количестве равном 1 *моль* при одинаковой температуре и давлении, занимают одинаковые объёмы.

В 1 моле любого газа содержится одинаковое количество молекул равное $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23} \frac{1}{моль}$. Это количество молекул называется числом Авогадро. Поэтому **в равных объёмах различных газов при одинаковых условиях всегда содержится одинаковое число молекул.**

5. **Закон Дальтона:** $P = \sum P_i$ – давление смеси идеальных газов равно сумме парциальных давлений входящих в неё газов.

*Парциальное давление* – давление, которое бы производил газ, входящий в состав газовой смеси, если бы он один занимал весь объём, в котором находится смесь.

6. **Закон Клапейрона –** объединённый закон газового состояния, который читается так: для данной массы газа произведение давления газа на его объём, делённое на абсолютную температуру газа, есть величина постоянная.

Математическая запись закона:

$$\frac{PV}{T} = const, \text{ при } m = const.$$

Вычислим эту постоянную величину для одного моля идеального газа, взятого при нормальных условиях: $P_0 = 1{,}013 \cdot 10^5\, Па,\ T_0 = 273{,}15K$. Согласно закону Авогадро объём одного моля равен $V_0$ = 22,4 *л*, значит объем 1 *моля* = 0,0224 *м*$^3$/*моль*. Тогда согласно объединенному газовому закону $\frac{P_0 V_{моля}}{T_0} = const = R$. Произведем вычисления *const* = *R*, получим $R = 8{,}31 \frac{Дж}{моль \cdot K}$ – постоянная *R* получила название **универсальной газовой постоянной.**

Таким образом, для 1 *моля* $\frac{P_0 V_{моля}}{T_0} = \frac{PV_{моля}}{T} = R$, то есть согласно объединенному газовому закону **произведение любого давления *P* на объём одного моля идеального газа** $V_{моля}$**, деленное на любую температуру *T* , есть величина постоянная и равная** *R*.

Если газ занимает объём *V*, то объём одного моля газа можно определить как $V_{моля} = \frac{V}{\nu}$, где $\nu$ – количество молей газа (вещества), тогда $\frac{PV_{моля}}{T} = \frac{PV}{T\nu} = R$ или $\frac{PV}{T} = R\nu = const$: для данной массы газа произведение давления газа на его объём, делённое на абсолютную температуру газа, есть величина постоянная.

7. **Уравнение Клапейрона–Менделеева** – уравнение состояния для газа массы *m*:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT = \nu RT,$$

$\nu = \frac{m}{\mu}$ – количество вещества (количество молей вещества),

$\nu = \frac{N}{N_A} = \frac{V}{V_{моля}}$,

$\mu$ – молярная масса газа (масса 1 *моля* газа),

$k = \frac{R}{N_A} = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{Дж}{K}$ – постоянная Больцмана.

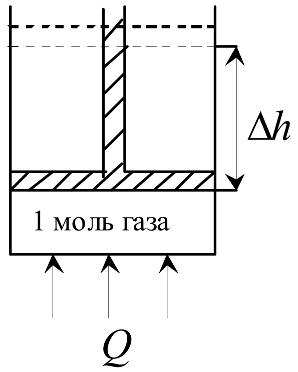
Запишем уравнение Клапейрона–Менделеева для 1 моля газа:

$$PV_{моля} = RT \qquad \Rightarrow \quad P = \frac{RT}{V_{моля}} = \frac{kN_A \cdot T}{V_{моля}} = nkT,$$

где $n = \dfrac{N_A}{V_{моля}}$ $\left[\dfrac{1}{м^3}\right]$ – концентрация молекул.

## 12.3. ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ УНИВЕРСАЛЬНОЙ ГАЗОВОЙ ПОСТОЯННОЙ

Величины, характеризующие состояние газа, это $m$ – масса газа, $V$ – объём газа, $P$ – давление газа, $T$ – температура газа. Эти величины называются параметрами состояния. Уравнение, связывающее параметры $m$, $P$, $V$ и $T$, называется уравнением состояния.




Уравнение состояния идеального газа – это уравнение Менделеева–Клапейрона:

$$PV = \frac{m}{\mu}RT,$$

$m$ – масса газа, $\mu$ – масса одного моля газа, тогда $\dfrac{m}{\mu}$ – число молей газа. Для одного моля газа $\dfrac{m}{\mu} = 1$ уравнение Менделеева– Клапейрона записывается:

$$PV = RT,$$

где $R$ – универсальная газовая постоянная.

Выясним физический смысл универсальной газовой постоянной $R$.

Пусть 1 моль идеального газа заключен в цилиндр под поршень (см. рис.). Первое, начальное, состояние газа характеризуется параметрами $V_1$, $P_1$, $T_1$**.** Будем нагревать газ при постоянном давлении ($P_1 = const$).

Пусть второе, конечное, состояние газа характеризуется параметрами $V_2$, $P_1$, $T_2$**.** При подводе тепла $Q$ поршень приподнялся на высоту $\Delta h$ в результате расширения газа при постоянном давлении $P_1$. Газ совершил работу $A$ по поднятию поршня:

$$A = F\Delta h,$$

где $F$ – сила, действующая на поршень со стороны газа; $P_1$ - давление газа на поршень. Давление $P_1$ и сила $F$ связаны соотношением:

$$P_1 = \frac{F}{S},$$

где $S$ – площадь поршня. Отсюда $F = P_1 S$ и $A = P_1 S\Delta h$. Но $S\Delta h = \Delta V$, $\Delta V$ – изменение объёма газа; $\Delta V = V_2 - V_1$. Следовательно $A = P_1\Delta V$. Найдём $\Delta V$.

Записываем уравнение Менделеева–Клапейрона для 1 моля газа дважды: для первого состояния и для второго:

$$\begin{cases} P_1 V_1 = RT_1, \\ P_1 V_2 = RT_2. \end{cases}$$

и вычтем из нижнего уравнения верхнее. Получим:

$$P_1(V_2 - V_1) = R(T_2 - T_1) \text{ или } P_1\Delta V = R\Delta T,$$

где $\Delta T$ – изменение температуры при переходе газа из начального состояния в конечное состояние. Так как

$$A = P_1\Delta V = R\Delta T,$$

То

$$R = \frac{A}{\Delta T}.$$

Теперь можно определить физический смысл универсальной газовой постоянной *R*.

Универсальная газовая постоянная *R* равна работе, которую совершает 1 *моль* идеального газа при изобарическом расширении, если газ нагреть на один градус.

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие два метода изучения явлений в молекулярной физике и термодинамике Вы знаете?
2. Какой газ называется идеальным газом?
3. Какой процесс называется изотермическим процессом?
4. Какой процесс называется изобарическим (изобарным) процессом?
5. Какой процесс называется изохорическим процессом?
6. Какие законы идеального газа Вы знаете?
7. Напишите уравнения состояния идеального газа.
8. Каков физический смысл универсальной газовой постоянной?

## Лекция 13

# ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

Термины и понятия

Беспорядочность
Броуновское движение
Вечный
Глубокая древность
Догадка
Задний
Заштрихованный
Импульс силы
Канифоль
Мельчайшие частицы
Молекулярно-кинетической
Научная атомистика
Неопределенный
Несостоятельность
Опытные обоснования
Основное уравнение
Отскочить
Окружен
Постоянная Больцмана
Преимущественный
Преимущество
Реальность
Число Авогадро
Эмульсия

## 13.1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

Мысль о том, что все тела состоят из мельчайших частиц, высказывалась ещё в глубокой древности. Древнегреческий философ Демокрит учил, что окружающий мир состоит из мельчайших частиц, которые дальше уже нельзя разделить и которые он назвал атомами. Однако учение Демокрита об атомах являлось только гениальной догадкой. В средневековье учение об атомах было забыто. И только в 17-18 вв. мельчайшие частички снова стали упоминаться в трудах Ньютона, Бойля и некоторых других учёных.

Подлинным основателем научной атомистики 18 в. явился русский учёный М.В. Ломоносов. Им были написаны научные труды «Элементы математической химии», «О нечувствительных физических частичках», «Размышление о причине теплоты и холода». М.В. Ломоносов первым высказал мысль о том, что теплота есть результат движения мельчайших частичек, из которых состоят тела.

Большой вклад в развитие теории о строении вещества внесли английские учёные Джоуль, Дальтон, Максвелл, русские химики Менделеев и Бутлеров, немец Клаузиус, австрийский физик Больцман, польский учёный Смолуховский, француз Перрен и т.д.

Размеры отдельных молекул и атомов крайне малы и крайне малы их массы. Например, масса атома водорода равна $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ кг. Мы как будто лишены возможности непосредственно, с помощью наших органов чувств, убедиться в реальности существования атомов и молекул и их теплового движения. И всё-таки опытные обоснования молекулярно-кинетической теории есть. Одним из них является броуновское движение. Под микроскопом рассматриваются частицы эмульсии. Эмульсия – это смесь измельчённого вещества с жидкостью, в которой это вещество практически не растворяется, пример эмульсии – измельчённая канифоль, смешанная с водой. В воде канифоль практически не растворяется.

В микроскоп видно, что частицы находятся в непрерывном хаотическом движении. Это и есть броуновское движение.

Сначала броуновское движение пытались объяснить сотрясениями фундамента здания, неравномерным нагревом жидкости и т.п. Однако опытная проверка показала несостоятельность всех этих объяснений. И только примерно через 50 лет после открытия броуновского движения было высказано предположение, что движение частиц вызвано тепловым (беспорядочным, хаотическим) движением молекул жидкости.

Частицы канифоли со всех сторон окружены молекулами воды. Молекулы воды находятся в состоянии теплового движения, они с разных сторон ударяют частицы канифоли.

В данный момент времени частица движется в ту сторону, в которую направлена результирующая сила, действующая на частицу со стороны молекул жидкости. В следующий момент времени частица может двигаться в другом направлении, поскольку молекулы воды движутся хаотично. Движение самих молекул воды мы не видим, но мы видим результат этого движения.

Броуновское движение может считаться прямым доказательством реальности существования теплового движения молекул той жидкости, в которой находятся частицы измельчённого вещества.

При изучении физических явлений происходящих с макроскопическими системами используется статистический метод. Теория, основанная на статистическом методе исследования физических свойств макросистем и учитывающая систему, как совокупность беспорядочно движущихся молекул называется кинетической (молекулярно-кинетической) теорией.

Кинетическая теория газов основана на общих положениях классической статистической физики:

1. в системе частиц выполняются законы сохранения импульса, момента импульса, энергии и числа частиц;
2. все частицы системы считаются «мечеными», то есть предполагается возможность отличать друг от друга тождественные частицы;
3. все физические процессы протекают в пространстве и во времени непрерывно;
4. каждая частица системы имеет совершенно произвольные значения координат и компонент скорости независимо от того, каковы эти характеристики у других частиц системы.

Идеальный газ можно рассматривать как совокупность беспорядочно движущихся молекул-шариков, имеющих пренебрежимо малый собственный объём и не взаимодействующих друг с другом на расстоянии. Молекулы непрерывно сталкиваются друг с другом и со стенками сосуда, производя на них давление. Таким образом, давление – макроскопическое проявление теплового движения молекул газа.

Важнейшей задачей кинетической теории газов является вычисление давления идеального газа на основе молекулярно-кинетических представлений.

<u>Основные положения молекулярно-кинетической теории таковы</u>:

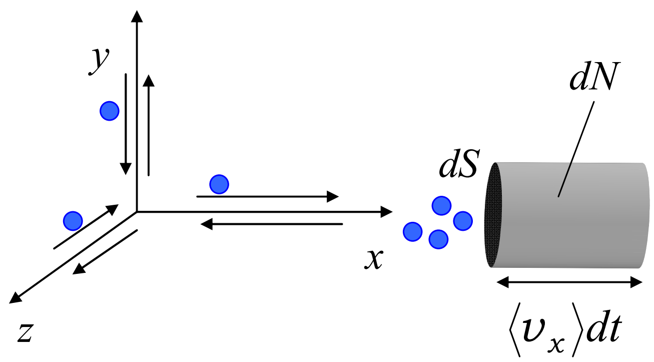
1. Все тела состоят из атомов или молекул.

2. Между атомами и молекулами идеального газа нет сил взаимодействия.

3. Атомы и молекулы находятся в вечном хаотическом движении. Это непрерывное хаотическое движение называется тепловым движением атомов и молекул. Интенсивность этого движения определяет температуру газа.

Исходя из основных положений молекулярно-кинетической теории, рассчитаем поток частиц, прошедших в единицу времени через площадку $dS$, если площадка ориентирована перпендикулярно направлению движения молекул.

Пусть в объёме $dV$ находится $dN$ молекул, которые непрерывно и хаотично движутся. Будем считать, что все молекулы имеют одинаковую скорость $\langle v \rangle$.




Для упрощения хаотичное движение молекул заменим движением по 3-м осям *x*, *y*, *z*. Обозначим среднюю скорость в направлении оси *x* через $\langle \upsilon_x \rangle$.

Число частиц в объёме $dV$ можно определить, если известна концентрация частиц в единице объёма $n$: $dN = n\langle \upsilon_x \rangle dtdS$. Так как движение молекул хаотичное, все направления движения равновероятны, то можно считать, что вдоль каждой из осей могут двигаться 1/3 всех молекул, находящихся в объёме. Вдоль каждой из осей могут двигаться 1/3 всех молекул, находящихся в объёме. А, например, в положительном направлении оси *x* только 1/6 часть молекул.

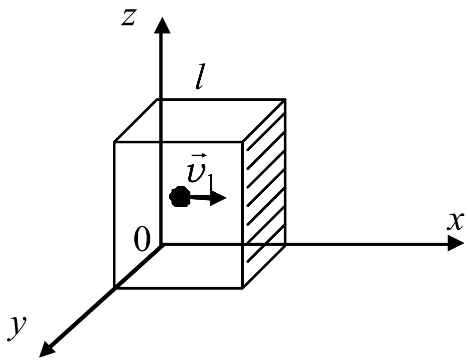
Тогда поток частиц, прошедших через площадку $dS$ перпендикулярную оси *x* за время $dt$ пройдет $dN' = \frac{1}{6} dN = \frac{1}{6} n\langle \upsilon_x \rangle dtdS$. Можно ввести понятие плотности потока частиц – число молекул, прошедших через единичную площадку, расположенную перпендикулярно направлению движения молекул, за единицу времени: $j = \frac{dN'}{dS \cdot dt} = \frac{1}{6} n\langle \upsilon_x \rangle$.

## 13.2. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ГАЗОВ

**Важнейшей задачей** молекулярно-кинетической теории газов является установление связи между макроскопическими параметрами (давлением $P$ и температурой $T$) и характеристиками составляющих газ частиц (молекул) – массой частиц, их скоростью, концентрацией и т.д.

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории газов связывает давление $P$ газа с микроскопическими характеристиками газа, то есть с величинами, характеризующими движение молекул, составляющих этот газ.

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории будем выводить для идеального газа. Рассмотрим газ, находящийся в сосуде, имеющем форму куба.




$l$ – длина ребра куба, $N$ – общее число молекул газа, находящегося в данном сосуде.

Молекулы газа находятся в непрерывном хаотическом движении. Никакого преимущественного направления движения нет.

Рассмотрим какую-нибудь молекулу в сосуде. Скорость этой молекулы в данный момент времени может быть направлена куда угодно, но эту скорость $\vec{\upsilon}$ всегда можно разложить на три составляющие $\upsilon_x, \upsilon_y$, $\upsilon_z$. Точно также можно поступить со скоростью любой другой молекулы. Поэтому, учитывая полную беспорядочность движения молекул по разным направлениям, можно считать, что по любому из трех возможных направлений движется одна треть всех молекул.

Найдем давление P газа на заштрихованную стенку кубического сосуда. Между левой и правой стенками движется, как уже было сказано, одна третья часть всех молекул

$$N' = \frac{1}{3}N,$$

$N'$ – число молекул, движущихся между правой и левой стенками.

Молекулы идеального газа друг с другом не взаимодействуют, следовательно, все они движутся равномерно и прямолинейно. Рассмотрим отдельную молекулу. Обозначим $m_0$ – масса молекулы. Пусть молекула движется со скоростью $\vec{\upsilon}_1$ к заштрихованной стенке.

$\vec{\upsilon}_1$ – скорость молекулы до удара. Молекула ударилась о стенку сосуда и отскочила.

$-\vec{\upsilon}_1$ – скорость молекулы после удара. Скорость молекулы изменила своё направление, но по величине осталась той же самой, так как удар молекулы о стенку – это абсолютно упругий удар.

Изменение импульса молекулы, т.е. изменение её количества движения, равно:

$$\Delta(m_0\vec{\upsilon}_1) = -m_0\vec{\upsilon}_1 - m_0\vec{\upsilon}_1 = -2m_0\vec{\upsilon}_1.$$

Согласно второму закону Ньютона это изменение должно равняться импульсу силы: $\vec{f}_1\delta t = \Delta(m_0\vec{v}_1)$, где $\delta t$ – продолжительность удара, $\vec{f}_1$ – сила, с которой стенка сосуда действует на молекулу за время $\delta t$. Отметим, что, согласно третьему закону Ньютона, с такой же силой молекула будет действовать на стенку.

Отскочив от заштрихованной (правой) стенки молекула полетит к левой стенке и через время $\Delta t$ снова вернётся к правой стенке сосуда. $\Delta t$ – время от начала одного удара до другого. $\Delta t > \delta t$. Время $\delta t$, характеризующее продолжительность удара, есть время довольно неопределённое. А вот время $\Delta t$ определить можно. За время $\Delta t$ молекула проходит расстояние $2l$.

$$2l = \upsilon_1 \Delta t \text{ и } \Delta t = \frac{2l}{\upsilon_1}.$$

Так как время $\Delta t$ найдено, то лучше вместо отдельных ударов молекулы о стенку ввести в рассмотрение силу $\vec{F}_1$, постоянно действующую на стенку за время $\Delta t$. Величина этой силы должна определяться из условия:

$$\vec{F}_1 \Delta t = -\vec{f}_1 \delta t.$$

Тогда

$$\vec{F}_1 \Delta t = -\Delta(m_0 \vec{\upsilon}_1) = 2m_0 \vec{\upsilon}_1.$$

$\vec{F}_1$ – сила, действующая на стенку за время $\Delta t$ со стороны первой рассматриваемой молекулы. Величина силы, с которой молекула действует на стенку перпендикулярную направлению движения молекулы за один удар:

$$F_1 \frac{2l}{\upsilon_1} = 2m_0 \upsilon_1 \text{ или } F_1 = \frac{m_0 \upsilon_1^2}{l}.$$

Однако молекулы газа движутся с самыми разными скоростями. Если рассматриваемая молекула движется со скоростью $\upsilon_1$, то другая будет двигаться со скоростью $\upsilon_2$, третья со скоростью $\upsilon_3$ и т.д. Молекула с номером $N'$ будет двигаться со скоростью $\upsilon_{N''}$, где $N'$ – число молекул, движущихся в направлении оси $x$ (между левой и правой стенками). Силы, с которыми другие молекулы действуют на эту же стенку сосуда, равны:

$$F_1 = \frac{m_0 \upsilon_1^2}{l},\ F_2 = \frac{m_0 \upsilon_2^2}{l},\ F_3 = \frac{m_0 \upsilon_3^2}{l},\ \ldots\ldots, F_{N'} = \frac{m_0 \upsilon_{N'}^2}{l}.$$

Результирующая сила, с которой молекулы действуют на заштрихованную стенку:

$$F = F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_{N'} = \frac{m_0 \upsilon_1^2}{l} + \frac{m_0 \upsilon_2^2}{l} + \frac{m_0 \upsilon_3^2}{l} + \ldots + \frac{m_0 \upsilon_{N'}^2}{l} =$$

$$= \frac{m_0 N'}{l} \left( \frac{\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 + \upsilon_3^2 + \ldots + \upsilon_{N'}^2}{N'} \right).$$

Выражение $\dfrac{\upsilon_1^2+\upsilon_2^2+\upsilon_3^2+...+\upsilon_{N'}^2}{N'}=\langle\upsilon_{кв}\rangle^2$ является средним значением квадратов скоростей молекул или квадратом средней квадратичной скорости молекул газа.

Итак, средняя квадратичная скорость молекул газа:

$$\langle\upsilon_{кв}\rangle=\sqrt{\frac{\upsilon_1^2+\upsilon_2^2+\upsilon_3^2+...+\upsilon_{N'}^2}{N'}}.$$

Вспоминая, что $N'=\dfrac{1}{3}N$, имеем:

$$F=\frac{m_0N'}{l}\langle\upsilon_{кв}\rangle^2=\frac{1}{3}\frac{m_0N}{l}\langle\upsilon_{кв}\rangle^2.$$

Площадь стенки сосуда равна $l^2$. Давление – это сила, приходящаяся на единицу площади. Следовательно, $P=\dfrac{F}{l^2}$ и $P=\dfrac{1}{3}m_0\dfrac{N}{l^3}\langle\upsilon_{кв}\rangle^2$;

$\dfrac{N}{l^3}=n_0$, $n_0$ – концентрация молекул, т.е. число молекул, находящихся в единице объёма газа. Тогда: $P=\dfrac{1}{3}n_0m_0\langle\upsilon_{кв}\rangle^2$ – это выражение называется основным **уравнением молекулярно-кинетической теории газов.**

Это уравнение связывает между собой макроскопический параметр – давление $P$ с микроскопическими характеристиками составляющих газ частиц – массой молекулы, их концентрацией, средним значением квадрата скорости.

Уравнение можно записать в другой форме, если выразить концентрацию молекул через полное число $N$ всех молекул газа в сосуде объёмом $V$:

$n_0=\dfrac{N}{V}$, тогда $PV=\dfrac{1}{3}Nm_0\langle\upsilon_{кв}\rangle^2$ – это уравнение носит название основного уравнения кинетической теории газов.

Рассмотрим некоторые **следствия из основного уравнения молекулярно-кинетической теории**:

1. Записываем уравнение $P=\dfrac{1}{3}n_0m_0\langle\upsilon_{кв}\rangle^2$. Умножим и поделим правую часть уравнения на 2, получим:

$$P=\frac{2}{3}n_0\frac{m_0\langle\upsilon_{кв}\rangle^2}{2}=\frac{2}{3}n_0\overline{E}_к,$$

где $\overline{E}_к$ – средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы газа. **Давление газа определяется средней кинетической энергией поступательного движения молекул.**

2. Теперь умножим левую и правую части уравнения $P = \frac{2}{3} n_0 \overline{E}_к$ на $V_0$, где $V_0$ – объём одного моля идеального газа. Получим:

$$PV_0 = \frac{2}{3} n_0 V_0 \overline{E}_к.$$

Но $PV_0 = RT$, а $n_0 V_0 = N_A$, где $N_A$ – число Авогадро, равное числу молекул в одном моле. Тогда

$$RT = \frac{2}{3} N_A \overline{E}_к.$$

Отсюда

$$\overline{E}_к = \frac{3}{2} \frac{R}{N_A} T.$$

Отношение $\frac{R}{N} = k$, $k$ – постоянная Больцмана. Окончательно:

$$\overline{E}_к = \frac{3}{2} kT.$$

Напоминаем, что при выводе этой формулы молекула газа рассматривалась, как материальная точка. Из формулы видно, что средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул идеального газа прямо пропорциональна абсолютной температуре этого газа и зависит только от температуры. Температура газа есть количественная мера интенсивности теплового движения молекул газа. Следовательно, **молекулярно-кинетический смысл абсолютной температуры *T* состоит в том, что она служит мерой средней кинетической энергии поступательного движения молекул.**

3. Найдем среднюю квадратичную скорость молекул $\langle \upsilon_{кв} \rangle$.

Так как $\overline{E}_к = \frac{3}{2} kT$, или $\frac{m_0 \langle \upsilon_{кв} \rangle^2}{2} = \frac{3}{2} kT$,

или

$$m_0 \langle \upsilon_{кв} \rangle^2 = 3kT.$$

Отсюда

$$\langle \upsilon_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}.$$

Так как $k = \dfrac{R}{N_A}$, то

$$\langle \upsilon_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{m_0 N_A}},$$

но $m_0 N_A = \mu$, $\mu$ – масса 1 моля газа. Тогда

$$\langle \upsilon_{в} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}.$$

4. Записываем основное уравнение $P = \dfrac{1}{3} n_0 m_0 \langle \upsilon_{кв} \rangle^2$. Умножим и делим на 2 правую часть уравнения.

$$P = \frac{2}{3} n_0 \frac{m_0 \langle \upsilon_{кв} \rangle^2}{2} = \frac{2}{3} n_0 \overline{E}_к.$$

Но $\overline{E}_к = \dfrac{3}{2} kT$. Тогда

$$P = \frac{2}{3} n_0 \frac{3}{2} kT = n_0 kT.$$

Выражение $P = n_0 kT$ тоже является основным уравнением молекулярно-кинетической теории газов.

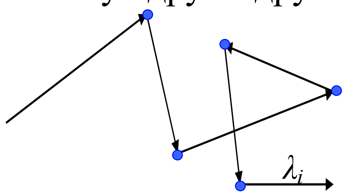
С другой стороны, $P = \dfrac{2}{3} n_0 \overline{E}_к = \dfrac{2}{3} \dfrac{N}{V} \overline{E_к}$ или $PV = \dfrac{2}{3} \overline{W}_к^{пост}$, где $\overline{W}_к^{пост} = N \cdot \overline{E_к}$ – суммарная кинетическая энергия поступательного движения всех молекул газа. Таким образом, **произведение давления идеального газа на его объём равно 2/3 кинетической энергии поступательного движения всех его молекул.**

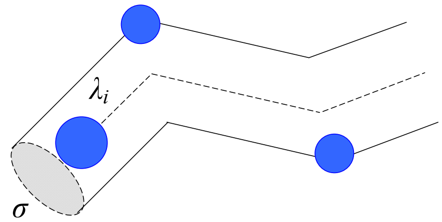
Суммарная кинетическая энергия молекул идеального газа называется **внутренней энергией** газа (потенциальной энергией молекулы идеального газа не имеют, так как они между собой не взаимодействуют). Внутренняя энергия тогда равна $U = \overline{W}_к^{пост} = \dfrac{3}{2} PV = \dfrac{3}{2} \dfrac{m}{\mu} RT$; внутренняя энергия идеального газа определяется его температурой.

## 13.3. СРЕДНЯЯ ДЛИНА СВОБОДНОГО ПРОБЕГА МОЛЕКУЛ ГАЗА

Длина свободного пробега – это расстояние, которое проходит молекула от одного столкновения до другого.

Рассмотрим идеальный газ, в котором все молекулы движутся хаотично. Траектория движения отдельной молекулы – это ломаная линия. Выделим из большого числа молекул одну и будем за ней следить, считая, что остальные молекулы в это время неподвижны. Взаимодействие молекул друг с другом – удар.



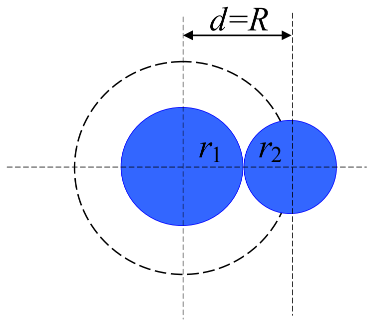

Считаем, что все молекулы, кроме одной, неподвижны. Взаимодействие молекул происходит в результате удара. Следовательно, центр «подвижной» молекулы будет двигаться по ломаной линии.

От удара до удара будет прямая линия, длина которой называется *длина свободного пробега* $\lambda_i$.

$\overline{\lambda} = \frac{\sum \lambda_i}{z}$ – средняя длина свободного пробега,

$z$ – число столкновений.

Молекула на своём пути будет сталкиваться со всеми молекулами, расстояние между центами которых и центром движущейся молекулы $\leq d$,
$d = r_1 + r_2 = R$;
$r_1$ – радиус движущейся молекулы,
$r_2$ – радиус покоящейся молекулы.




Если $r_1 = r_2$, то $2r = d$ – диаметр молекулы, т.е. столкновения между двумя молекулами будут происходить, если центры неподвижных молекул окажутся внутри объёма с площадью сечения $S = \pi R^2 = \pi d^2 = \pi(2r)^2$, длиной $l = \lambda_i$, $S$ – полное поперечное сечение взаимодействия. $r$ называется <u>эффективным радиусом молекулы</u>. Величина $\sigma = d = 2r$ называется эффективным диаметром молекулы.

Выпрямим ломаную траекторию движения молекулы в прямую. В этом случае $z$ (число ударов молекулы о другие молекулы) равно числу молекул в объёме с длиной $l$ ($l = \sum \lambda_i$), равном пути, пройденному движущейся молекулой за время $t$, например, за единицу времени (в 1 сек). Тогда, среднее расстояние, которое пролетела молекула от одного удара до другого, равна $\overline{\lambda} = \frac{l}{z}$, где $z$ – число столкновений за время $t$. Найдём $z$.

Объём $V$ цилиндра, в котором движется молекула можно определить по формуле: $V = \pi(2r)^2 l = 4\pi r^2 l$.

Если $n_0$ – концентрация молекул, то число молекул в объёме $V$ равно $4\pi r^2 l n_0$, это число будет равно числу столкновений $z$, т.к. движущаяся молекула столкнётся со всеми молекулами, центры которых заключены в ломаном цилиндре. Итак, $z = 4\pi r^2 l n_0$. Если учесть, что все молекулы движутся одновременно, то расчёты дают формулу: $z = 4\sqrt{2}\pi r^2 l n_0 = \sqrt{2}\pi\sigma^2 l\, n_0$.

Тогда: $\bar{\lambda} = \dfrac{1}{4\sqrt{2}\pi r^2 n_0}$ или $\bar{\lambda} = \dfrac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 n_0}$.

Из формулы видно, что длина свободного пробега молекул обратно пропорциональна концентрации молекул: $\bar{\lambda} \sim \dfrac{1}{n_0}$, так как давление $P = n_0 kT$, то, следовательно, $\bar{\lambda} \sim \dfrac{1}{P}$.

Если уменьшать давление $P$, то средняя длина свободного пробега $\bar{\lambda}$ увеличивается.

Можно откачать газ из сосуда так, что линейные размеры сосуда $L < \bar{\lambda}$. Тогда молекулы будут летать от стенки к стенке, не испытывая столкновений. В этом случае говорят, что в сосуде вакуум.

## 13.3. ВАКУУМ. РАЗРЕЖЕННЫЕ ГАЗЫ

Газ считается разреженным, если длина свободного пробега его молекул соизмерима с линейными размерами сосуда, в котором находится этот газ. Если длина свободного пробега молекул больше линейных размеров сосуда, то такой газ называется ультраразреженным. Если взять сосуд с размерами около 10 см, то уже при давлении $P = 10^{-4}$ мм рт. ст. в этом сосуде будет ультраразреженный газ, или иными словами, вакуум.

Под словом «вакуум» нельзя понимать «абсолютную пустоту», т.е. полное отсутствие молекул. Например, при давлении $P = 10^{-4}$ мм рт. ст. в каждом кубическом сантиметре газа находится тысячи млрд. молекул.

Свойства ультраразреженного газа отличаются от свойств газа при обычных давлениях. Молекулы газа перестают сталкиваться друг с другом, молекулы сталкиваются только со стенками сосуда. Ряд понятий теряет смысл.

Нельзя говорить о вязкости (внутреннем трении) газа, так как в таком газе не могут возникнуть слои из молекул, обменивающихся скоростями. Нельзя говорить о теплопроводности между частями газа; если молекулы не сталкиваются друг с другом, значит, они не обмениваются кинетическими энергиями. Явления переноса неприменимы к газам, находящимся в состоянии ультраразрежения.

Условиям получения вакуума и способам измерения низких давлений посвящена целая область техники – вакуумная техника.

Для получения высокого вакуума применяют вакуумные установки. Вакуумная установка состоит не менее чем из двух последовательно работающих насосов.

Первый насос создаёт предварительное разрежение (форвакуум), давление газа при форвакууме порядка $(10^{-3} - 10^{-4})$ мм рт. ст. Форвакуумный насос удаляет откачиваемый газ в атмосферу. Второй насос является высоковакуумным. Этот насос создаёт в откачиваемом сосуде вакуум, давление при котором порядка $(10^{-7} - 10^{-8})$ мм рт. ст.; откачиваемый газ удаляется высоковакуумным насосом в форвакуум, т.е. в пространство с уже пониженным давлением. Таким образом, высоковакуумный насос работает в паре с форвакуумным насосом.

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Каковы основные положения молекулярно-кинетической теории?
2. Приведите пример опытного обоснования молекулярно-кинетической теории.
3. Напишите выражение для средней квадратичной скорости молекул газа.
4. Напишите основное уравнение молекулярно-кинетической теории газов. Какие физические величины входят в это уравнение?

# Лекция 14

# ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Термины и понятия

Вероятность
Внешнее воздействие на что?
Достоверный
Дискретный
Закон Максвелла
Микросостояние
Находиться в интервале
Невозможный
Непрерывный
Статистика
Статистический
Ось абсцисс
Ось ординат
Пространство скоростей
Равновозможный
Скоростная точка

## 14.1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Физические величины, встречающиеся в молекулярной физике (давление, объём, температура, средний квадрат смещения частицы при броуновском движении и т.д.) имеют смысл средних значений, которые принимают при определенных условиях какие-то функции микросостояний системы. Про величины такого рода говорят, что они имеют статистический характер или являются статистическими величинами. Все эти величины подчиняются определенным закономерностям, не свойственным отдельным атомам и молекулам. Это связано с большим количеством частиц в системах. Такие закономерности, обусловленные большим количеством участвующих в их возникновении молекул, атомов, называются *статистическими* или *вероятностными закономерностями.* Статистические закономерности изучаются *теорией вероятности.* Приведем некоторые элементарные понятия теории вероятности, необходимые для дальнейшего изложения материала.

1. Событиями или случаями в теории вероятностей называют всякие явления, относительно которых имеет смысл ставить вопрос, могут они происходить или нет. Опыт или совокупность условий, в результате которых появляется то или иное событие, в теории вероятностей называется испытанием.

Если событие при данных условиях обязательно произойдет, то такое событие называется *достоверным.* Если событие произойти не может, то такое событие называется *невозможным.*

Событие называется *случайным*, если в результате испытания оно может произойти или не произойти.

2. Два случайных события называются равновозможными или равновероятными, если нет никаких оснований ожидать, что при испытаниях одно из них будет появляться чаще другого. Несколько событий называют равновозможными, если каждые два из них равновозможные события.

3. Вероятность случайного события – это количественная мера ожидаемой возможности его появления. *Вероятностью случайного события называется отношение числа равновозможных случаев его появления к числу всех испытаний.* Если всего испытаний $N$, а число равновозможных случаев появления случайного события $dN$, то вероятность случайного события $dp = \frac{dN}{N}$.

Вероятность достоверного события равна единице, вероятность невозможного события равна нулю.

Это понятие вероятности случайного события применительно к случаю, когда число равновозможных случаев появления случайного события из большого множества испытаний имеет конечное значение. Иначе говоря, величина, описывающая случайное событие может принимать ряд дискретных значений.

4. Если величина, описывающая случайное событие принимает непрерывный ряд значений, то необходимо рассматривать вероятность того, что значение этой величины заключено в некотором интервале или вероятность $dp$ того, что значение величины, описывающей случайное событие, заключено в интервале от $a$ до $a + da$. Вероятность такого события пропорциональна ширине бесконечно узкого интервала $da$ и её можно представить в виде: $dp = \varphi(a)da$, причем коэффициент пропорциональности $\varphi(a)$ зависит от $a$. Функция $\varphi(a)$ называется плотностью вероятности.

5. Функция плотности вероятности случайного события $\varphi(a)$ должна удовлетворять следующему условию (условию нормировки): так как $dp = \frac{dN}{N}$, а $dp = \varphi(a)da$, то $dN = N\varphi(a)da$. Проинтегрируем это выражение по всем возможным значениям непрерывной величины $\int dN = \int_{-\infty}^{+\infty} N\varphi(a)da$; так как $\int dN = N$, то $N = N\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(a)da$ или $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(a)da = 1$ – это условие называется условием нормировки.

6. Основные теоремы теории вероятностей – теорема сложения вероятностей и теорема умножения вероятностей. Сформулируем эти теоремы без доказательства.

*Теорема сложения вероятностей.* Вероятность суммы несовместимых событий равна сумме вероятностей этих событий. Пусть событие $B$ является суммой событий $A_1$ и $A_2$, то есть состоит в появлении либо события $A_1$, либо события $A_2$ (безразлично какого), тогда вероятность появления события $B$ равна сумме вероятностей появления события $A_1$ и вероятности появления события $A_2$: $P(B) = P(A_1) + P(A_2)$.

*Теорема умножения вероятностей.* Вероятность произведения двух событий $A_1$ и $A_2$ равна произведению вероятностей одного события на вероятность другого события, если эти события независимые. Если вероятность каждого из двух событий $A_1$ и $A_2$ не зависит от того, произошло второе событие или не произошло, то такие события называются независимыми. Тогда $P(A \cdot B) = P(A_1) \cdot P(A_2)$.

7. Важным понятием в теории вероятностей является понятие среднего значения случайной величины (математического ожидания). Пусть величина $a$ может принимать непрерывный ряд значений, тогда среднее значение величины $\langle a \rangle$ можно определить по формуле: $\langle a \rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} a\varphi(a)da$.

## 14.2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСВЕЛЛА

Молекулы любого газа находятся в вечном хаотическом движении. Скорости молекул могут принимать самые различные значения. Молекулы сталкиваются, в результате столкновений происходит изменение скоростей молекул. В каждый данный момент времени скорость каждой отдельной молекулы является случайной и по величине и по направлению.

Пусть газ состоит из $N$ тождественных частиц, находящихся в беспорядочном хаотичном движении. При определенной температуре газ занимает объем $V$. Силовые поля отсутствуют.

Из опыта известно, что участвующие в хаотическом тепловом движении молекулы газа в равновесном состоянии при температуре $T$ обладают различными скоростями. Встречаются медленные молекулы, скорости которых близки к нулю. Встречаются очень быстрые молекулы, скорости которых во много раз больше средней скорости теплового движения. Между этими двумя предельными случаями скорости молекул с различной вероятностью принимают всевозможные значения. Очевидно, имеет смысл выяснить, сколько молекул обладает скоростью, близкой к некоторому заданному значению. Чтобы ответить на этот вопрос, найдем закон распределения молекул по скоростям, который называется законом распределения Максвелла.

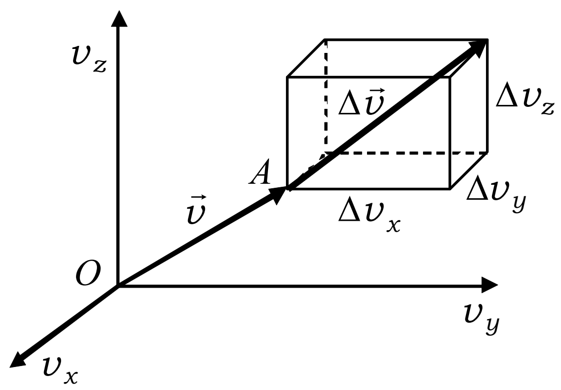
### 14.2.1. Распределение молекул по значениям проекции скорости на координатную ось

Сначала рассмотрим распределение молекул по значениям проекции скорости на координатную ось. Для удобства введем понятие трехмерного пространства скоростей.

Пусть газ состоит из *N* тождественных частиц, находящихся в беспорядочном хаотичном движении. В определенный момент времени определим скорости всех молекул $\vec{\upsilon}_1, \vec{\upsilon}_2, \vec{\upsilon}_3, .....\vec{\upsilon}_N$. Примем произвольную точку *O* пространства за начало координат. Отложим от неё скорости всех молекул $\vec{\upsilon}_1, \vec{\upsilon}_2, \vec{\upsilon}_3, .....\vec{\upsilon}_N$. Концы этих векторов называются «скоростными точками». Совокупность «скоростных точек» образует трехмерное пространство, которое называется **пространством скоростей**. Если с точкой *O* связать систему координат, то координатами «скоростной точки» в этом пространстве будут проекции $\upsilon_x$, $\upsilon_y$, $\upsilon_z$ вектора $\vec{\upsilon}$ на эти оси. Например: точке *A* соответствует молекула со скоростью $\vec{\upsilon}$. Координаты точки *A*, в координатном пространстве скоростей – это проекции вектора $\vec{\upsilon}$ на оси системы координат представляют собой $\upsilon_x$, $\upsilon_y$ и $\upsilon_z$.

Задание скоростей всех молекул газа эквивалентно заданию координат всех «скоростных точек» в пространстве скоростей. Каждая точка в этом пространстве соответствует молекуле с какой-то скоростью. Решение задачи о распределении скоростей молекул, таким образом, сводится к определению положения «скоростных точек» в пространстве скоростей в любой момент времени. Так как молекул много, то распределение молекул по скоростям следует рассматривать как статистическую задачу.

Возьмем в пространстве скоростей физически бесконечно малый объём $\Delta V$. Среднее число молекул («скоростных точек»), попавших в этот объём в пространстве скоростей $\Delta N$. Вследствие хаотичного движения молекул $\Delta N$ непрерывно меняется, но при установившемся равновесном состоянии газа среднее значение $\langle \Delta N \rangle$ остается постоянным и подчиняется определенным статистическим закономерностям. (В дальнейшем при выводе закона распределения молекул по скоростям под $\Delta N$ будем подразумевать среднее $\langle \Delta N \rangle$).




Число молекул («скоростных точек») в пространстве скоростей, попавших в объём $\Delta V = \Delta\upsilon_x \Delta\upsilon_y \Delta\upsilon_z$ пропорционально объёму $\Delta V$, общему числу молекул и вероятности попадания их в этот объём: $\Delta N = Nf(\vec{\upsilon})\Delta V$. Вероятность того, что из $N$ молекул $\Delta N$ попало в объём $\Delta V$ или вероятность того, что молекулы имеют скорость $\vec{\upsilon}$ в интервале от $\vec{\upsilon}$ до $\vec{\upsilon}+\Delta\vec{\upsilon}$ равна $\frac{\Delta N}{N} = f(\vec{\upsilon})\Delta V$. Если газ занимает объём $V$, то можно записать $\frac{\Delta N}{V} = \frac{N}{V} f(\vec{\upsilon})\Delta V \Rightarrow \Delta n = nf(\vec{\upsilon})\Delta V$,

где $n$ – концентрация молекул в единице объёма, $f(\vec{\upsilon})$ – плотность вероятности распределения молекул в пространстве скоростей. Нахождение $f(\vec{\upsilon})$ – это и есть статистическая задача о распределении молекул по скоростям.

Функция $f(\vec{\upsilon})$ должна удовлетворять условию нормировки: $dN = Nf(\vec{\upsilon})dV$, $\int\limits_V dN = N$, тогда $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{\upsilon})dV = 1$.

Функция распределения $f(\vec{\upsilon})$ меняется непрерывно и плавно с изменением скорости $\vec{\upsilon}$. Она описывает вероятное распределение молекул по скоростям.

Следует обратить внимание на то, что если $\Delta V \to 0$, то $\Delta N \to 0$. Таким образом, среднее число молекул со строго определенной скоростью $\vec{\upsilon}$ равно нулю.

По смыслу функции распределения $\Delta N = Nf(\vec{\upsilon})\Delta V = Nf(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z)\Delta\upsilon_x \Delta\upsilon_y \Delta\upsilon_z$ – это среднее количество молекул проекции скоростей, которых лежат в интервале $\upsilon_x$ и $\upsilon_x + \Delta\upsilon_x$, $\upsilon_y$ и $\upsilon_y + \Delta\upsilon_y$, $\upsilon_z$ и $\upsilon_z + \Delta\upsilon_z$. Функция распределения $f(\vec{\upsilon})$ определяет трехмерное (объёмное) распределение молекул в пространстве скоростей. Или

$$\Delta n = nf(\vec{\upsilon})\Delta V = nf(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z)\Delta\upsilon_x \Delta\upsilon_y \Delta\upsilon_z,$$

а $$\frac{\Delta n}{n} = f(\vec{\upsilon})\Delta V = f(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z)\Delta\upsilon_x\Delta\upsilon_y\Delta\upsilon_z.$$

Выясним, какова вероятность того, что $x$ – составляющая скорости молекулы лежит в интервале $\upsilon_x$ и $\upsilon_x + \Delta\upsilon_x$. Ясно, что эта вероятность пропорциональна ширине рассматриваемого скоростного интервала $\Delta\upsilon_x$ и функции распределения молекул по проекции $\upsilon_x$ вектора скорости. Обозначим эту вероятность $\varphi(\upsilon_x)\Delta\upsilon_x$, где $\varphi(\upsilon_x)$ – одномерная функция распределения. Она характеризует распределение молекул не по полной скорости $\vec{\upsilon}$, а только по её проекции $\upsilon_x$ на ось $x$. Число молекул $\Delta n_x$ в единице объема, имеющих составляющую скорости $\upsilon_x$ в интервале $\upsilon_x$ и $\upsilon_x + \Delta\upsilon_x$, будет прямо пропорционально общему числу молекул $n$ и $\Delta\upsilon_x$: $\Delta n_x = \varphi(\upsilon_x) n \Delta\upsilon_x$, (14.1)

$\varphi(\upsilon_x) = \dfrac{\Delta n}{n\Delta\upsilon_x}$ – функция распределения показывает вероятность того, что проекция скорости молекул лежит в единичном интервале $\Delta\upsilon_x$ вблизи некоторого значения $\upsilon_x$.

Запишем выражение (1) несколько иначе, а именно

$$\frac{\Delta n_x}{n} = \varphi(\upsilon_x)\Delta\upsilon_x. \qquad (14.2)$$

Отношение $\dfrac{\Delta n_x}{n_x}$ представляет собой вероятность того, что молекулы имеют составляющую скорости по оси $x$ в интервале $\upsilon_x$ и $(\upsilon_x + \Delta\upsilon_x)$.

Ввиду полного равноправия всех направлений движения распределения молекул по значениям проекций скорости $\upsilon_x$, $\upsilon_y$, $\upsilon_z$ будут одинаковыми.

Вероятность того, что молекулы имеют составляющую скорости по оси $y$, лежащую в интервале $\upsilon_y$ и $(\upsilon_y + \Delta\upsilon_y)$, выражается формулой:

$$\frac{\Delta n_y}{n} = \varphi(\upsilon_y)\Delta\upsilon_y,$$

а вероятность того, что молекула будет иметь составляющую скорости по оси $z$ в интервале $\upsilon_z$ и $(\upsilon_z + \Delta\upsilon_z)$, выражается формулой:

$$\frac{\Delta n_z}{n} = \varphi(\upsilon_z)\Delta\upsilon_z.$$

Вероятность $\frac{\Delta n}{n}$ того, что молекулы имеют скорость, составляющие которой заключены в пределах от $\upsilon_x$, $\upsilon_y$, и $\upsilon_z$ до $\upsilon_x + \Delta\upsilon_x$, $\upsilon_y + \Delta\upsilon_y$, $\upsilon_z + \Delta\upsilon_z$,

равно произведению вероятностей $\frac{\Delta n_x}{n}$, $\frac{\Delta n_y}{n}$, $\frac{\Delta n_z}{n}$ (так в теории вероятности рассчитывается вероятность сложного события),

то есть $\frac{\Delta n}{n} = \frac{\Delta n_x}{n}\frac{\Delta n_y}{n}\frac{\Delta n_z}{n}$; или

$$\frac{\Delta n}{n} = \varphi(\upsilon_x)\varphi(\upsilon_y)\varphi(\upsilon_z)\Delta\upsilon_x\Delta\upsilon_y\Delta\upsilon_z, \qquad (14.3)$$

однако $\frac{\Delta n}{n} = f(\vec{\upsilon})\Delta V = f(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z)\Delta\upsilon_x\Delta\upsilon_y\Delta\upsilon_z$, это означает, что $\varphi(\upsilon_x)\varphi(\upsilon_y)\varphi(\upsilon_z)\Delta\upsilon_x\Delta\upsilon_y\Delta\upsilon_z = f(\vec{\upsilon})\Delta\upsilon_x\Delta\upsilon_y\Delta\upsilon_z$ или $\varphi(\upsilon_x)\varphi(\upsilon_y)\varphi(\upsilon_z) = f(\vec{\upsilon})$.

Положительные и отрицательные направления движения молекул газа по любой координатной оси эквивалентны. Поэтому должно быть $\varphi(\upsilon_x) = \varphi(-\upsilon_x)$. Значит, функция φ может зависеть только от модуля или квадрата скорости $\upsilon_x$, то есть $\varphi(\upsilon_x) = \varphi(\upsilon_x^2)$. Аналогично $\varphi(\upsilon_y) = \varphi(\upsilon_y^2)$, $\varphi(\upsilon_z) = \varphi(\upsilon_z^2)$. Точно также функция $f$ может зависеть только от квадрата скорости $\vec{\upsilon}$ и не зависит от направления скорости, то есть $f(\vec{\upsilon}) = f(\upsilon^2)$.

Чтобы выполнялось условие $\varphi(\upsilon_x)\varphi(\upsilon_y)\varphi(\upsilon_z) = f(\vec{\upsilon})$ или $\varphi(\upsilon_x^2)\varphi(\upsilon_y^2)\varphi(\upsilon_z^2) = f(\upsilon^2)$, необходимо предположить, что $\varphi(\upsilon_x) = \varphi(\upsilon_x^2) = c \cdot e^{-\lambda\upsilon_x^2}$; $\varphi(\upsilon_y) = \varphi(\upsilon_y^2) = c \cdot e^{-\lambda\upsilon_y^2}$; $\varphi(\upsilon_z) = \varphi(\upsilon_z^2) = c \cdot e^{-\lambda\upsilon_z^2}$, тогда $f(\vec{\upsilon}) = f(\upsilon^2) = f(\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2) = c^3 \cdot e^{-\lambda\upsilon^2}$, где $c$ и $\lambda$ – коэффициенты, зависящие от параметров молекул, которые необходимо определить.

Вид функции $\varphi(\upsilon_x) = \varphi(\upsilon_x^2)$, а также $f(\vec{\upsilon}) = f(\upsilon^2)$ можно найти путем несложных математических преобразований.

Так как молекулы движутся беспорядочно, хаотично, то отношение $\frac{\Delta n}{n}$ является постоянной величиной: $\frac{\Delta n}{n} = const$.

Значит, дифференциал от этой величины равен нулю: $d(\frac{\Delta n}{n})=0$.

Кроме того, если элементарный объем $\Delta\upsilon_x, \Delta\upsilon_y, \Delta\upsilon_z$ является постоянным, то

$$d(\Delta\upsilon_x\Delta\upsilon_y\Delta\upsilon_z)=0. \tag{14.4}$$

Продифференцируем выражение (14.2):

$$d(\frac{\Delta n}{n})=d[\varphi(\upsilon_x)\varphi(\upsilon_y)\varphi(\upsilon_z)]\Delta\upsilon_x\Delta\upsilon_y\Delta\upsilon_z+$$

$$+\varphi(\upsilon_x)\varphi(\upsilon_y)\varphi(\upsilon_z)\times d[\Delta\upsilon_x\Delta\upsilon_y\Delta\upsilon_z]=0.$$

Второй член в этом выражении равен нулю, согласно (14.4).

Тогда $$d[\varphi(\upsilon_x)\varphi(\upsilon_y)\varphi(\upsilon_z)]\Delta\upsilon_x\Delta\upsilon_y\Delta\upsilon_z=0.$$

Так как элементарный объем $\Delta\upsilon_x\Delta\upsilon_y\Delta\upsilon_z \neq 0$, то

$$d[\varphi(\upsilon_x)\varphi(\upsilon_y)\varphi(\upsilon_z)]=0.$$

Дифференцируем

$$\varphi'(\upsilon_x)\varphi(\upsilon_y)\varphi(\upsilon_z)d\upsilon_x+\varphi(\upsilon_x)\varphi'(\upsilon_y)\varphi(\upsilon_z)d\upsilon_y+\varphi(\upsilon_x)\varphi(\upsilon_y)\varphi'(\upsilon_z)d\upsilon_z=0.$$

.

Разделим все члены этого выражения на $\varphi(\upsilon_x)\varphi(\upsilon_y)\varphi(\upsilon_z)$, получим

$$\frac{\varphi'(\upsilon_x)}{\varphi(\upsilon)_x}d\upsilon_x+\frac{\varphi'(\upsilon_y)}{\varphi(\upsilon_y)}d\upsilon_y+\frac{\varphi'(\upsilon_z)}{\varphi(\upsilon_z)}d\upsilon_z=0. \tag{14.5}$$

Теперь вспомним, что

$$\upsilon^2=\upsilon_x^{\ 2}+\upsilon_y^{\ 2}+\upsilon_z^{\ 2} \tag{14.6}$$

и что $\upsilon=const$ в том смысле, что скорость $\upsilon$ не меняется по отношению к изменению ее составляющих $\upsilon_x$, $\upsilon_y$, и $\upsilon_z$.

Тогда, дифференцируя выражение (14.5), получим $\upsilon_x d\upsilon_x+\upsilon_y d\upsilon_y+\upsilon_z d\upsilon_z=0$.

Умножим последнее выражение на произвольную постоянную величину $\beta$ и сложим с (14.5).

$$[\frac{\varphi'(\upsilon_x)}{\varphi(\upsilon_x)}+\beta\upsilon_x]d\upsilon_x+[\frac{\varphi'(\upsilon_y)}{\varphi(\upsilon_y)}+\beta\upsilon_y]d\upsilon_y+[\frac{\varphi'(\upsilon_z)}{\varphi(\upsilon_z)}+\beta\upsilon_z]d\upsilon_z=0.$$

Написанное выражение может выполняться только в том случае, если каждый его член равен нулю. Следовательно,

$$\frac{\varphi'(\upsilon_x)}{\varphi(\upsilon_x)}+\beta\upsilon_x=0, \tag{7}$$

$$\frac{\varphi'(\upsilon_y)}{\varphi(\upsilon_y)}+\beta\upsilon_y=0, \tag{8}$$

$$\frac{\varphi'(\upsilon_z)}{\varphi(\upsilon_z)} + \beta\upsilon_z = 0. \tag{14.9}$$

Эти уравнения легко решаются. Решим уравнение (14.7). Обозначим для удобства $\varphi(\upsilon_x) = y$, тогда $\varphi'(\upsilon_x) = \dfrac{dy}{d\upsilon_x}$ и уравнение (14.7) перепишется в виде

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{d\upsilon_x} + \beta\upsilon_x = 0 \text{ или}$$

$$\frac{dy}{y} = -\beta\upsilon_x d\upsilon_x\,, \quad \int\frac{dy}{y} = -\beta\int\upsilon_x d\upsilon_x\,,$$

$\ln y = -\dfrac{\beta\upsilon_x{}^2}{2} + c_1 = -\lambda\upsilon_x^2 + c_1$ . Константу интегрирования $c_1$ можно взять в виде $c_1 = \ln c$.

Тогда $\ln y = -\lambda\upsilon_x{}^2 + \ln c$ и $y = ce^{-\lambda\upsilon_x{}^2}$.

Переходим к старым обозначениям и получим:

$$\frac{\Delta n_x}{n} = \varphi(\upsilon_x)\Delta\upsilon_x = ce^{-\lambda\upsilon_x{}^2}\Delta\upsilon_x\text{, значит } \varphi(\upsilon_x) = ce^{-\lambda\upsilon_x{}^2}.$$

Аналогично $\dfrac{\Delta n_y}{n} = \varphi(\upsilon_y)\Delta\upsilon_y = ce^{-\lambda\upsilon_y{}^2}\Delta\upsilon_y$ и $\varphi(\upsilon_y) = ce^{-\lambda\upsilon_y{}^2}$, а

$$\frac{\Delta n_z}{n} = \varphi(\upsilon_z)\Delta\upsilon_z = ce^{-\lambda\upsilon_z{}^2}\Delta\upsilon_z \text{ и } \varphi(\upsilon_z) = ce^{-\lambda\upsilon_z{}^2}.$$

Перемножим вероятности, получим:

$$\frac{\Delta n}{n} = f(\vec{\upsilon})\Delta\upsilon_x\Delta\upsilon_y\Delta\upsilon_z = c^3 e^{-\lambda(\upsilon_x{}^2+\upsilon_y{}^2+\upsilon_z{}^2)}\Delta\upsilon_x\Delta\upsilon_y\Delta\upsilon_z \text{ или}$$

$$f(\vec{\upsilon}) = c^3 e^{-\lambda(\upsilon_x{}^2+\upsilon_y{}^2+\upsilon_z{}^2)}.$$

$$\frac{\Delta n}{n} = c^3 e^{-\lambda\upsilon^2}\Delta\upsilon_x\Delta\upsilon_y\Delta\upsilon_z\,.$$

Найдем коэффициенты $c$ и $\lambda$, входящие в уравнение функции распределения молекул по проекциям скорости на координатные оси.

1. Найдем $c$ из условия нормировки.

Функция распределения молекул по проекции скорости на ось $x$ $\varphi(\upsilon_x) = ce^{-\lambda\upsilon_x{}^2}$ должна быть нормирована, то есть должно выполняться условие нормировки: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(a)da = 1$, или $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\upsilon_x)d\upsilon_x = 1$, тогда $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} c\cdot e^{-\lambda\upsilon_x^2}d\upsilon_x = 1$. Так как $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda\upsilon_x^2}d\upsilon_x = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$, то $c = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}$.

2. Найдем λ. Воспользуемся понятием **среднего** случайной величины (математического ожидания). Если величина $a$ может принимать непрерывный ряд значений, тогда среднее значение величины $\langle a\rangle$ можно определить по формуле: $\langle a\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} a\varphi(a)da$.

Найдем среднее значение квадрата проекции скорости на ось $x$:

$$\left\langle \upsilon_x^2\right\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} c\cdot e^{-\lambda\upsilon_x^2}\upsilon_x^2 d\upsilon_x = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda\upsilon_x^2}\upsilon_x^2 d\upsilon_x = \frac{1}{2\alpha},$$ так как $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda\upsilon_x^2}\upsilon_x^2 d\upsilon_x = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}$.

Определим среднее значение квадрата проекции скорости на ось $x$. Воспользуемся понятием средней кинетической энергии теплового движения молекул: $\langle E_\kappa\rangle = \overline{E}_\kappa = \frac{3}{2}kT$, с другой стороны $\langle E_\kappa\rangle = \overline{E}_\kappa = \frac{m_0\langle\upsilon\rangle^2}{2} = \frac{m_0\langle\upsilon_x\rangle^2}{2} + \frac{m_0\langle\upsilon_y\rangle^2}{2} + \frac{m_0\langle\upsilon_z\rangle^2}{2}$, учитывая, что $\langle\upsilon_x\rangle^2 = \left\langle\upsilon_x^2\right\rangle$, $\langle\upsilon_y\rangle^2 = \left\langle\upsilon_y^2\right\rangle$, $\langle\upsilon_z\rangle^2 = \left\langle\upsilon_z^2\right\rangle$ и что все направления движения молекул при хаотичном движении равновероятны, можно записать $\langle E_\kappa\rangle = \overline{E}_\kappa = 3\frac{m_0\langle\upsilon_x\rangle^2}{2} = \frac{3}{2}kT$, отсюда можно найти $\left\langle\upsilon_x^2\right\rangle = \frac{kT}{m_0}$.

Из сравнения формул $\left\langle\upsilon_x^2\right\rangle = \frac{kT}{m_0}$ и $\left\langle\upsilon_x^2\right\rangle = \frac{1}{2\alpha}$ найдем $\alpha$:

$$\alpha = \frac{m_0}{2kT}.$$

3. Так как $c = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}$, а $\alpha = \frac{m_0}{2kT}$, то $c = \sqrt{\frac{m_0}{2\pi kT}}$.

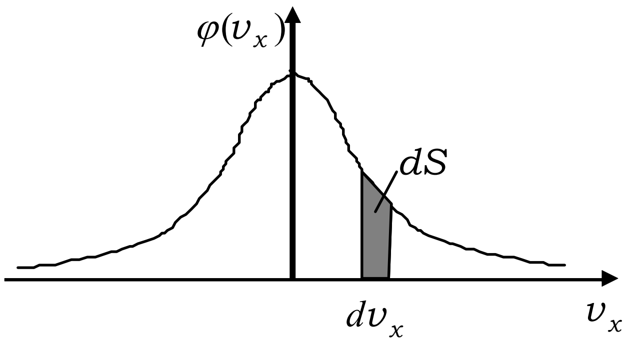
Подставим полученные коэффициенты в выражения для функции распределения молекул по проекциям скорости и проанализируем полученное уравнение.

Функция распределения молекул по проекции скорости на ось $x$:

$\varphi(\upsilon_x) = ce^{-\lambda \upsilon_x^2}$ или $\varphi(\upsilon_x) = (\frac{m_0}{2\pi kT})^{1/2} e^{-\frac{m_0 \upsilon_x^2}{2kT}}$. Относительное число молекул, проекции скорости, которых лежат в интервале от $\upsilon_x$ до $\upsilon_x + \Delta\upsilon_x$ (вероятность того, что проекции скорости молекул лежат в интервале от $\upsilon_x$ до $\upsilon_x + \Delta\upsilon_x$) можно определить по формуле: $\frac{\Delta n_x}{n} = \varphi(\upsilon_x)\Delta\upsilon_x$. А число молекул в единице объёма газа, проекции скоростей которых лежат в интервале от $\upsilon_x$ до $\upsilon_x + \Delta\upsilon_x$, равна:

$$\Delta n_x = (\frac{m_0}{2\pi kT})^{1/2} n e^{-\frac{m_0 \upsilon_x^2}{2kT}} \Delta\upsilon_x .$$

График функции $\varphi(\upsilon_x)$ представлен на рисунке. Отметим некоторые свойства функции распределения.




1. Функция является четной, её график симметричен относительно оси ординат.

2. Площадь $dS$ фигуры, ограниченной бесконечно малым интервалом оси абсцисс шириной $d\upsilon_x$, участком графика функции $\varphi(\upsilon_x)$, соответствующим этому интервалу, и отрезками параллельных оси ординат прямых, проведенных через граничные точки интервала $d\upsilon_x$, равна относительному числу молекул газа $\frac{dn_x}{n}$, значение проекций скорости, которых принадлежит интервалу ($\upsilon_x$; $\upsilon_x + \Delta\upsilon_x$). Действительно, $dS = \varphi(\upsilon_x)d\upsilon_x = \frac{dn_x}{n}$.

3. Площадь части координатной плоскости, ограниченной осью абсцисс и графиком функции $\varphi(\upsilon_x)$, равна единице, так как $S=\int dS=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\upsilon_x)d\upsilon_x=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dn_x}{n}=\frac{n}{n}=1$.

Распределение молекул равновесного газа по проекциям $\upsilon_y$ и $\upsilon_z$ будут описываться формулами, аналогичными распределению молекул по проекции $\upsilon_x$: $\varphi(\upsilon_y)=(\frac{m_0}{2\pi kT})^{1/2}e^{-\frac{m_0\upsilon_y^2}{2kT}}$;

$$\varphi(\upsilon_z)=(\frac{m_0}{2\pi kT})^{1/2}e^{-\frac{m_0\upsilon_z^2}{2kT}}.$$

Число молекул в единице объёма газа, проекции скоростей которых лежат в интервале от $\upsilon_y$ до $\upsilon_y+\Delta\upsilon_y$, равна: $\Delta n_y=(\frac{m_0}{2\pi kT})^{1/2}ne^{-\frac{m_0\upsilon_y^2}{2kT}}\Delta\upsilon_y$.

Число молекул в единице объёма газа, проекции скоростей которых лежат в интервале от $\upsilon_z$ до $\upsilon_z+\Delta\upsilon_z$, равна: $\Delta n_z=(\frac{m_0}{2\pi kT})^{1/2}ne^{-\frac{m_0\upsilon_z^2}{2kT}}\Delta\upsilon_z$.

Число $\Delta n$ молекул в единицу объема в газе, составляющие скоростей, которых одновременно лежат в интервале от $\upsilon_x$ до $\upsilon_x+\Delta\upsilon_x$; от $\upsilon_y$ до $\upsilon_y+\Delta\upsilon_y$; от $\upsilon_z$ до $\upsilon_z+\Delta\upsilon_z$ определяется формулой:

$$\Delta n=(\frac{m_0}{2\pi kT})^{3/2}ne^{-\frac{m_0(\upsilon_x^2+\upsilon_y^2+\upsilon_z^2)}{2kT}}\Delta\upsilon_x\Delta\upsilon_y\Delta\upsilon_z$$

или $$\Delta n=(\frac{m_0}{2\pi kT})^{3/2}ne^{-\frac{E_к}{kT}}\Delta\upsilon_x\Delta\upsilon_y\Delta\upsilon_z.$$

## Лекция 15

# ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ (продолжение)

Термины и понятия

Асимметричный
Атмосферный
Барометр
Вакуумная камера
Гумигут
Диафрагма
Коаксиальный
Микросостояние
Наиболее вероятная скорость
Наивероятная
Средняя арифметическая
Статистика
Печь, печка
Пространство скоростей
Равновозможный
Скоростная точка
Тубус микроскопа
Цилиндрический столб
Эмульсия

### 15.1.1. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МОЛЕКУЛ ПО ЗНАЧЕНИЯМ МОДУЛЯ СКОРОСТИ

Функция распределения молекул идеального газа по скоростям $f(\vec{\upsilon}) = f(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z)$ по определению равна $f(\vec{\upsilon}) = f(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z) = \dfrac{\Delta n(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z)}{n\Delta\upsilon_x, \Delta\upsilon_y, \Delta\upsilon_z}$, где $\Delta n(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z)$ – концентрация молекул газа, проекции скорости которых $\upsilon_x$, $\upsilon_y$, $\upsilon_z$ одновременно принадлежат интервалам ($\upsilon_x$, $\upsilon_x + \Delta\upsilon_x$), ($\upsilon_y$, $\upsilon_y + \Delta\upsilon_y$), ($\upsilon_z$, $\upsilon_z + \Delta\upsilon_z$); $n$ – полное число частиц в единице объёма; $\Delta\upsilon_x$, $\Delta\upsilon_y$, $\Delta\upsilon_z$ – ширина скоростных интервалов.

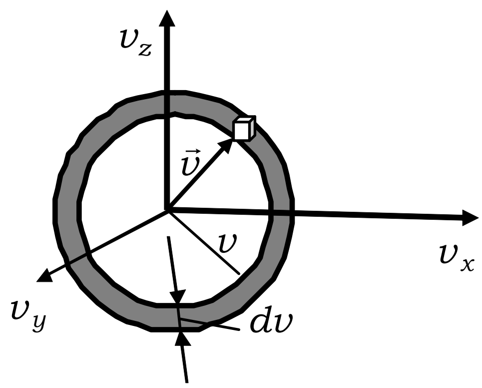
Функция $f(\vec{\upsilon}) = f(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z)$ позволяет определить число молекул идеального газа, у которых одновременно заданы все три проекции скорости. Поскольку вектор $\vec{\upsilon}$ полностью определен тремя проекциями $\upsilon_x$, $\upsilon_y$, $\upsilon_z$, функция $f(\vec{\upsilon}) = f(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z)$ характеризует распределение молекул по вектору скорости.

Так как $\varphi(\upsilon_x)\varphi(\upsilon_y)\varphi(\upsilon_z) = f(\vec{\upsilon})$, а $f(\vec{\upsilon}) = (\frac{m_0}{2\pi kT})^{3/2} e^{-\frac{m_0(\upsilon_x^2+\upsilon_y^2+\upsilon_z^2)}{2kT}}$,

тогда $$\frac{\Delta n}{n} = f(\vec{\upsilon})\Delta\upsilon_x\Delta\upsilon_y\Delta\upsilon_z = (\frac{m_0}{2\pi kT})^{3/2} e^{-\frac{m_0\upsilon^2}{2kT}}\Delta\upsilon_x\Delta\upsilon_y\Delta\upsilon_z$$

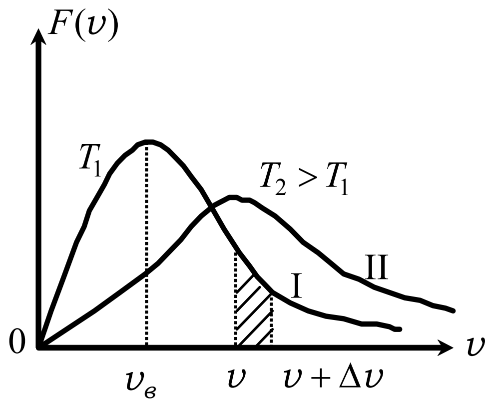
или $$\Delta n = (\frac{m_0}{2\pi kT})^{3/2} n e^{-\frac{m_0(\upsilon_x^2+\upsilon_y^2+\upsilon_z^2)}{2kT}}\Delta\upsilon_x\Delta\upsilon_y\Delta\upsilon_z.$$

Рассмотрим наиболее важный случай, когда требуется найти число $\Delta n$ молекул, абсолютные величины скоростей которых лежат в интервале $\upsilon$, $\upsilon + \Delta\upsilon$. Направление скоростей нас больше не интересует. Необходимо найти вероятность того, что модуль скорости молекулы заключен в интервале $\upsilon$, $\upsilon + \Delta\upsilon$. Обозначим эту вероятность $\frac{\Delta n}{n} = F(\upsilon)\Delta\upsilon$. Функция распределения $F(\upsilon)$ связана с ранее выведенной функцией распределения $f(\vec{\upsilon}) = f(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z)$.




Из произвольно выбранной точки $O$ фазового пространства скоростей будем откладывать векторы скоростей всех молекул газа (как мы поступали ранее). Из них отберем векторы с длинами, заключенными в интервале $\upsilon$ и $\upsilon + \Delta\upsilon$. Соответствующие скоростные точки (молекулы) лежат внутри бесконечно тонкого шарового слоя со средним радиусом $\upsilon$ и толщиной $\Delta\upsilon$. Объём этого шарового слоя равен $4\pi\upsilon^2\Delta\upsilon$. Объёмная плотность $f(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z)$ внутри шарового слоя постоянная, так как она не зависит от направления скорости. Тогда $f(\upsilon_x, \upsilon_x, \upsilon_x)\cdot 4\pi\upsilon^2\Delta\upsilon = F(\upsilon)\Delta\upsilon$ или $f(\upsilon_x, \upsilon_x, \upsilon_x)\cdot 4\pi\upsilon^2 = F(\upsilon)$. Окончательно имеем:

$F(\upsilon) = 4\pi(\frac{m_0}{2\pi kT})^{3/2} e^{-\frac{m_0(\upsilon_x^2+\upsilon_y^2+\upsilon_z^2)}{2kT}}\upsilon^2$ – функция распределения молекул по модулю скорости. А число молекул, модуль скорости которых заключен в интервале $\upsilon$ и $\upsilon+\Delta\upsilon$ равно: $\Delta n = 4\pi(\frac{m_0}{2\pi kT})^{3/2} n\ e^{-\frac{m_0\upsilon^2}{2kT}}\ \upsilon^2\Delta\upsilon$.




Очевидно, что функция $F(\upsilon)$ удовлетворяет условию нормировки $\int\limits_0^\infty F(\upsilon)d\upsilon = 1.$

График функции $F(\upsilon)$ представлен на рисунке.

*Свойства распределения Максвелла по модулю скорости*:

1. Кривая $F(\upsilon)$ асимметрична и проходит через нуль в начале координат.
2. Кривая распределения имеет максимум. Положение максимума кривой $F(\upsilon)$ определяется произведением $f(\vec{\upsilon})\cdot 4\pi\upsilon^2 = F(\upsilon)$, так как при малых значениях скорости $\upsilon$ степенная функция $\upsilon^2$ растёт быстрее экспоненты, а при больших $\upsilon$ наоборот.
3. При увеличении температуры $T$ максимум функции $F(\upsilon)$ распределения смещается в сторону более высоких скоростей и понижается, так как площадь под кривой не меняется.
$\int\limits_0^n dn = \int\limits_0^\infty F(\upsilon)nd\upsilon \quad \Rightarrow n = n\int\limits_0^\infty F(\upsilon)d\upsilon \quad \Rightarrow \int\limits_0^\infty F(\upsilon)d\upsilon = 1$ – условие нормировки.
4. Доля молекул, приходящихся на единичный интервал скоростей вблизи $\upsilon = 0$ и $\upsilon = \infty$, равна нулю.
5. Скорость, при которой функция $F(\upsilon)$ имеет максимум, называется **наиболее вероятной** $\upsilon_в$ **(наивероятной).** Кривая асимметрична относительно $\upsilon_в$, так как в газе имеется сравнительно небольшое число молекул с очень большими скоростями.

Рассмотрим какой-нибудь интервал $\upsilon$, $\upsilon+\Delta\upsilon$ (см. рис.). Если $\Delta\upsilon$ мало, то площадь $\Delta S$ заштрихованной полоски близка к площади прямоугольника:

$$\Delta S = \frac{\Delta n}{n\Delta\upsilon}\Delta\upsilon = \frac{\Delta n}{n},$$

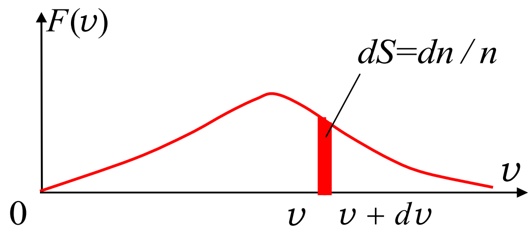
то есть площадь заштрихованной полоски представляет собою относительное число молекул в единице объема, скорости которых лежат в интервале $\upsilon$, $\upsilon + \Delta\upsilon$.

Доля молекул, обладающих строго определённым (точным) значением скорости, равна нулю.

$dn = nF(\upsilon)d\upsilon$

$d\upsilon \to 0 \quad \Rightarrow dn \to 0$

$\frac{dn}{n} = \textit{относительное число молекул} \to 0.$

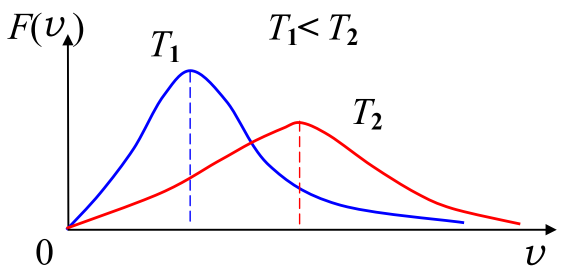



## 15.2. ПРИМЕНЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАКСВЕЛЛА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СКОРОСТЕЙ ГАЗОВЫХ МОЛЕКУЛ

Распределение Максвелла по модулю скорости имеет вид:

$$F(\upsilon) = \frac{dn}{nd\upsilon} = 4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \upsilon^2 \cdot e^{-\frac{m_0\upsilon^2}{2kT}}.$$

$m_0$ – масса молекулы.




Найдем характерные скорости теплового движения молекул.

1. Скорость, при которой функция $F(\upsilon)$ имеет максимум, называется **наиболее вероятной** $\upsilon_в$ **(наивероятной).** Чтобы найти значение $\upsilon_в$, необходимо продифференцировать функцию $F(\upsilon)$ по $\upsilon$ и приравнять нулю:

$$\left[\frac{d}{d\upsilon}\left(e^{-\frac{m_0\upsilon^2}{2kT}}\upsilon^2\right)\right]_{\upsilon=\upsilon_в} = 0.$$

$$e^{-\frac{m_0\upsilon_в^2}{2kT}}\left(-\frac{m_0 2\upsilon_в}{2kT}\right)\upsilon_в^2 + e^{-\frac{m_0\upsilon_в^2}{2kT}} 2\upsilon_в = 0 \quad \text{или}$$

$$e^{-\frac{m_0\upsilon^2}{2kT}}\upsilon_в[-\frac{m_0\upsilon_в{}^2}{kT}+2]=0.$$

Но $e^{-\frac{m_0\upsilon^2}{2kT}}\neq 0$ и $\upsilon_в\neq 0$, следовательно

$$-\frac{m_0\upsilon^2{}_в}{kT}+2=0 \quad \text{или} \quad \upsilon_в=\sqrt{\frac{2kT}{m_0}}.$$

Постоянная Больцмана $k=\frac{R}{N_A}$, где $R$ – универсальная газовая постоянная, а $N_A$ – число Авогадро.

Тогда $\upsilon_в=\sqrt{\frac{2RT}{N_A m}}$; но $N_A\, m=\mu$, где $\mu$ – масса моля газа.

Окончательно $\upsilon_в=\sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$.

2. **Средняя скорость молекул газа (средняя арифметическая скорость) –** называется вычисленное с помощью функции $F(\upsilon)$ среднее значение модуля скорости. Из теории вероятностей известно, что если величина $a$ может принимать непрерывный ряд значений, тогда среднее значение величины $\langle a\rangle$ можно определить по формуле: $\langle a\rangle=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}a\varphi(a)da$.

Воспользуемся этим определением.

Тогда $\langle\upsilon\rangle=\int\limits_0^\infty F(\upsilon)\,\upsilon\cdot d\upsilon=\int 4\pi(\frac{m_0}{2\pi kT})^{3/2}\upsilon^3 e^{-\frac{m_0\upsilon^2}{2kT}}d\upsilon=\sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}}=\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$,

при выводе формулы была выполнена замена переменной $x=\frac{m_0\upsilon^2}{2kT}$ и использовано табличное значение интеграла $\int\limits_0^\infty xe^{-x}dx=1$. Таким образом, средняя скорость теплового движения молекул при данной температуре равна $\langle\upsilon\rangle=\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$.

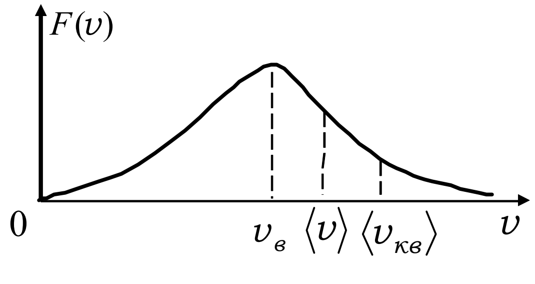
3. **Среднее квадратичное значение скорости молекул идеального газа.** Из теории вероятностей известно, что если величина $a$ может принимать непрерывный ряд значений, тогда среднее значение ве-

личины $\langle a^2 \rangle$ можно определить по формуле: $\langle a^2 \rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} a^2 \varphi(a) da$. Воспользуемся этим определением.

$$\langle \upsilon^2 \rangle = \langle \upsilon^2_{кв} \rangle = \int\limits_0^{\infty} F(\upsilon)\, \upsilon^2 \cdot d\upsilon = \int\limits_0^{\infty} 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} \upsilon^4 e^{-\frac{m_0\upsilon^2}{2kT}} d\upsilon = \frac{3kT}{m_0} = \frac{3RT}{\mu},$$

при выводе формулы была выполнена замена переменной $\lambda = \dfrac{m_0}{2kT}$ и использовано табличное значение интеграла $\int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda\upsilon^2} \upsilon^4 d\upsilon = \dfrac{3}{8}\dfrac{\sqrt{\pi}}{\lambda^{5/2}}$. Таким образом, средняя квадратичная скорость теплового движения молекул $\langle \upsilon_{кв} \rangle = \sqrt{\langle \upsilon^2_{кв} \rangle} = \sqrt{\dfrac{3RT}{\mu}}$.

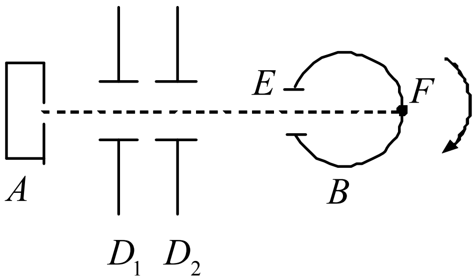
Итак, характерными скоростями молекул являются скорости:




1. наиболее вероятная $\upsilon_в = \sqrt{\dfrac{2RT}{\mu}}$ – скорость, близкой к которой обладают наибольшее число молекул газа при данной температуре;
2. средняя арифметическая $\langle \upsilon \rangle = \sqrt{\dfrac{8RT}{\pi\mu}}$ – это средняя скорость теплового движения молекул;
3. средняя квадратичная скорость $\langle \upsilon_{кв} \rangle = \sqrt{\langle \upsilon^2_{кв} \rangle} = \sqrt{\dfrac{3RT}{\mu}}$ – эта скорость характеризует среднюю кинетическую энергию теплового движения молекул.

**Опыт Штерна (1888 -1970 гг.)**

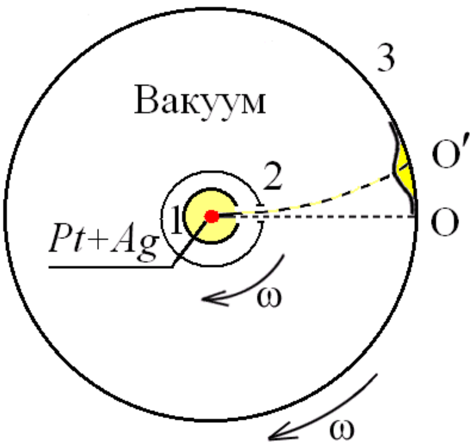
Штерн впервые поставил опыты с молекулярными пучками, позволяющие оценить скорости молекул газа. Рассмотрим один из вариантов опыта Штерна на схеме. Вся установка помещалась в вакуумной камере. Атомы висмута (или цезия), нагреваемого в печке $A$, вылетают через отверстие в печи. С помощью щелей в диафрагмах $D_1$ и $D_2$ создаётся узкий пучок атомов. На пути пучка вращается цилиндр $B$ со щелью $E$. Когда щель $E$ располагается напротив щелей в диафрагмах, в цилиндр влетают атомы. За время, пока эти атомы летят поперёк цилиндра, он успевает повернуться на некоторый угол, поэтому атомы попадают не в точку $F$, расположенную напротив щели $E$, а в точку, несколько смещённую относительно $F$. Более быстрые атомы оказываются при этом смещёнными меньше, а более медленные – больше.

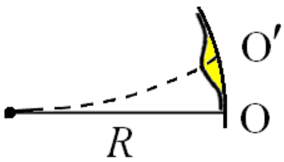



На внутренней поверхности цилиндра получается полоска осевшего металла с разной плотностью в разных местах. Измеряя плотность осевшего металла, можно найти закон распределения атомов в пучке по скоростям.

Опыт Штерна – первое экспериментальное определение скоростей молекул $\upsilon$ и подтверждение распределение Максвелла.

Другая установка по проверке распределения Максвелла.




$Pt + Ag$ – платиновая нить, покрытая серебром.

1, 2, 3 – коаксиальные цилиндры.

Платиновая нить нагревается током до $t \sim 1235^0$ С, при этом атомы серебра испаряются и через щель в цилиндре 1 и диафрагму в цилиндре 2 попадают на внутреннюю поверхность цилиндра 3, давая изображение щели – полосу О.

При вращении цилиндров 2 и 3 с одинаковой угловой скоростью $\omega$ атомы серебра оседают на некотором расстоянии от О, давая расплывчатое изображение щели. Положение молекул на поверхности цилиндра в осаждённом слое соответствует можно определить из уравнений

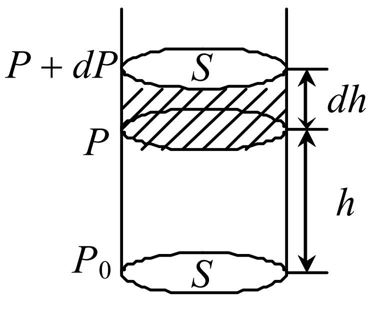
$OO' = \omega Rt$; $t = \dfrac{R}{\upsilon}$ тогда $OO' = \dfrac{\omega R^2}{\upsilon}$, а толщина осажденного слоя в этом месте пропорциональна количеству частиц имеющих эту скорость.

## 15.3. ИДЕАЛЬНЫЙ ГАЗ ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ. БАРОМЕТРОИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БОЛЬЦМАНА

Рассмотрим вертикальный столб воздуха у поверхности Земли. Если высота столба сравнительно невелика (не превышает нескольких сотен метров), плотность газа и количество молекул в единице объема (концентрация) будут приблизительно одинаковыми. Однако, если высота столба порядка километра и более, равномерность распределения молекул по высоте нарушается **действием силы тяжести,** которая стремится сконцентрировать молекулы у поверхности Земли. Вследствие этого плотность воздуха и атмосферное давление будут убывать по мере удаления от поверхности Земли.

Определим закон изменения давления с высотой (найдем барометрическую формулу).

Барометрическая формула показывает, как зависит атмосферное давление $P$ от высоты $h$ над поверхностью Земли. Пусть около поверхности Земли на высоте $h = 0$ давление $P = P_0$. Давление $P_0$ известно. Требуется найти изменение давления $P$ с высотой $h$.




При выводе предполагаем, что температура $T$ газа остаётся постоянной. Выделим над поверхностью Земли цилиндрический столб газа (воздуха) с сечением $S$. Рассмотрим слой газа бесконечно малой толщины $dh$, находящийся на высоте $h$ от основания столба.

Разность сил $dF$, действующих на верхнее и нижнее основание слоя, равна весу газа, заключённого в данном слое, то есть

$$dF = gdm.$$

Бесконечно малая масса $dm$ газа в слое вычисляется по формуле:

$$dm = \rho dV = \rho S dh,$$

где $dV$ – объём слоя газа.

Тогда $dF = \rho S g dh$, где $\rho$ – плотность газа, $g$ – ускорение силы тяжести.

Разность давлений на оба основания слоя:

$$dP = \frac{dF}{S} = \rho g dh .$$

И ещё надо поставить знак «минус»

$$dP = -\rho g dh , \tag{15.1}$$

потому что знак «минус» имеет физический смысл. Он показывает, что давление газа убывает с высотой. Если подняться на высоту $dh$, то давление газа уменьшится на величину $dP$.

Плотность газа $\rho$ находим из уравнения Менделеева – Клапейрона.

$$PV = \frac{m}{\mu} RT ;$$

Отсюда

$$\frac{m}{V} = \frac{P\mu}{RT}, \qquad \rho = \frac{P\mu}{RT}.$$

Подставим выражение $\rho = \frac{P\mu}{RT}$ в (15.1), имеем:

$$dP = -\frac{P\mu}{RT} g dh .$$

Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.

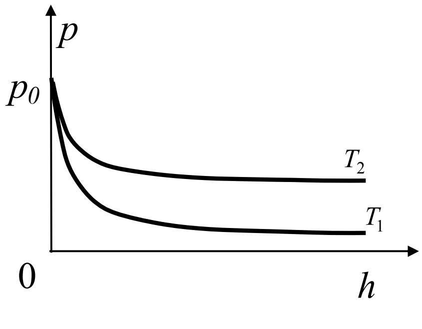
$$\frac{dP}{P} = -\frac{\mu g}{RT} dh .$$

Интегрируем:

$$\int_{p_0}^{p} \frac{dP}{P} = -\frac{\mu g}{RT} \int_{0}^{h} dh .$$

Получим барометрическую формулу:

$$P = P_0 e^{-\frac{\mu g h}{RT}} . \tag{15.2}$$




Два процесса:

1. тяготение,
2. тепловое хаотичное движение молекул

приводят к некоторому стационарному состоянию.

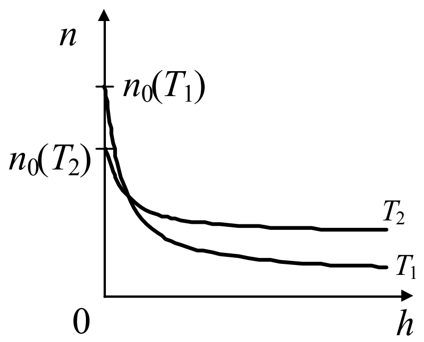
**Давление с высотой в поле силы тяжести уменьшается по экспоненте (экспоненциально)**

На рисунке показаны графики зависимости давления с высотой для двух значений температуры $T_1$ и $T_2$ ($T_2 > T_1$). С изменением температуры газа давление $P_0$ у поверхности Земли остается неизменным, так как оно равно весу расположенного над земной поверхностью вертикального столба газа единичной площади основания и неограниченного по высоте. Вес газа от температуры не зависит.

Из барометрической формулы очень легко получить распределение Больцмана для случая, когда внешним воздействием на газ является сила земного тяготения.

Давление $P$ газа на высоте $h$ прямо пропорционально числу молекул $n$ в единице объёма на этой высоте, $P = nkT$, $n$ – концентрация молекул на высоте $h$, а $P_0 = n_0 kT$, $n_0$ – концентрация молекул газа на высоте $h = 0$.

$$\text{То } n = n_0 e^{-\frac{\mu g h}{RT}} \text{ или } n = n_0 e^{-\frac{m_0 N g h}{RT}} = n_0 e^{-\frac{m_0 g h}{kT}}. \qquad (15.3)$$




Формула (15.3) называется распределением Больцмана для молекул в поле силы тяжести.

На рисунке показаны графики зависимости концентраций молекул с высотой для двух значений температуры $T_1$ и $T_2$ ($T_2 > T_1$) в поле силы тяжести. Концентрация молекул $n_0$ у поверхности Земли с увеличением температуры уменьшается ($n_0(T_2) < n_0(T_1)$) за счет перераспределения молекул внутри столба газа. Молекулы, обладающие большей кинетической энергией, поднимаются выше.

Если $E_П = m_0 g h$, $E_П$ – потенциальная энергия молекулы на высоте $h$, то

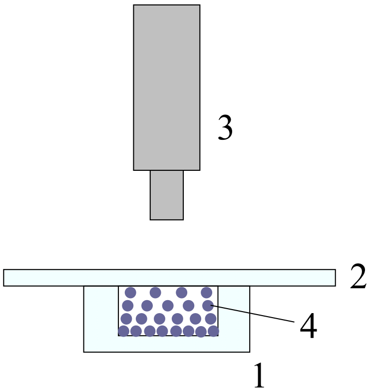
$$n = n_0 e^{-\frac{E_П}{kT}}. \qquad (15.4)$$

Формула (15.4) справедлива не только для случая, когда молекулы движутся в поле силы тяжести. Эта формула, выражающая распределение Больцмана справедлива для любого силового поля с потенциальной функцией $U$:

$$n = n_0 e^{-\frac{U}{kT}}.$$

## Опыт Перрена (1870 – 1942 гг.). Определение числа Авогадро

Французский физик Перрен воспользовался распределением Больцмана для экспериментального определения числа Авогадро.




Под микроскопом исследовалось броуновское движение частиц, которые распределялись по высоте подобно молекулам газа в поле тяготения.
1 – предметное стекло,
2 – покровное стекло,
3 – микроскоп,
4 – эмульсия с шариками диаметром доли микрон (частицы гуммигута – млечного сока деревьев).

Микроскоп наводился на верхний слой эмульсии, делали через микроскоп мгновенную фотографию, подсчитывали число броуновских частиц на фотографии. Далее тубус микроскопа опускали на 0,01 мм, снова фотографировали и подсчитывали число броуновских частиц на фотографии. Оказалось, что на дне сосуда броуновских частиц больше, на поверхности эмульсии меньше, а в целом распределение броуновских частиц по высоте соответствует распределению Больцмана. Так как шарики гуммигута находятся в жидкости (эмульсии), то потенциальная энергия их с учетом выталкивающей силы Архимеда можно записать $U=(m_0-m_{ж})gh$, где $m_0$ – масса шарика,
$m_{ж}$ – масса объёма жидкости, вытесненной шариком. Тогда распределение Больцмана можно записать $n=n_0e^{-\frac{(m_0-m_{ж})gh}{kT}}$.

Если $n_1$ и $n_2$ – измеренные концентрации частиц на высотах $h_1$ и $h_2$, то $n_1=n_0e^{-\frac{(m_0-m_{ж})gh_1}{kT}}$; $n_2=n_0e^{-\frac{(m_0-m_{ж})gh_2}{kT}}$, а $\frac{n_1}{n_2}=e^{-\frac{(m_0-m_{ж})g(h_1-h_2)}{kT}}$.

Тогда можно определить $\ln\frac{n_1}{n_2}=\frac{(m_0-m_{ж})g(h_2-h_1)}{kT}$ и

$$k=\frac{(m_0-m_{ж})g(h_2-h_1)}{T\ln\frac{n_1}{n_2}}.$$

Величину $m_0 - m_{ж} = (\rho_0 - \rho_{ж})V = \rho_0 V \dfrac{\rho_0 - \rho_{ж}}{\rho_0} = m_0 \dfrac{\rho_0 - \rho_{ж}}{\rho_0}$, где $\rho_0$ и $\rho_{ж}$ – плотности материала шариков и эмульсии.

Определив экспериментально постоянную Больцмана $k$ Перрен получил из зависимости $R = kN_A \Rightarrow N_A = \dfrac{R}{k}$ значение числа Авогадро $N_A = 6{,}8 \cdot 10^{23} \dfrac{1}{моль}$. Точное значение: $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23} \dfrac{1}{моль}$.

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какими скоростями можно характеризовать тепловое движение молекул газа?

Какая скорость называется наиболее вероятной скоростью?

2. Напишите формулу распределения Максвелла для числа молекул, скорости которых лежат в интервале ($\upsilon$, $\upsilon + \Delta\upsilon$). Поясните, какие физические величины входят в эту формулу.

3. Напишите барометрическую формулу. Какую зависимость выражает барометрическая формула?

4. Получите, пользуясь барометрической формулой, распределение Больцмана.

## Лекция 16

# РАБОТА, ВНУТРЕННЯЯ ЭНЕРГИЯ И ТЕПЛОТА. ПЕРВОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

Термины и понятия

| | |
|---|---|
| Гантельная модель | Процесс |
| Двухатомный | Равновесный |
| Закон о распределении энергии | Релаксация |
| Изопроцессы | Теплоизолированный |
| Одноатомный | Теплообмен |
| Перегородка | Теплопроводящий |
| Поршень | Термодинамическая система |
| Подвижный поршень | Число степеней свободы |
| Полный дифференциал | Функция состояния |

## 16.1. ВВЕДЕНИЕ

Термодинамика – это наука, изучающая условия превращения различных видов энергии в тепловую и обратно, а также количественные соотношения, наблюдаемые при этом. Термодинамика охватывает большой круг явлений, наблюдаемых в природе и технике. Особое значение она имеет для теплотехники, так как даёт основу для разработки тепловых и холодильных машин. В термодинамике часто пользуются словом тело. В термодинамике телом можно назвать воздух, воду, ртуть, любой газ, т.е. любое вещество, занимающее определённый объём.

Термодинамическая система может включать в себя несколько тел, но может состоять из одного тела, очень часто этим телом является идеальный газ.

*Термодинамической системой называется любая совокупность рассматриваемых тел, которые могут обмениваться энергией между собой и с другими телами.* Например, термодинамической системой может быть идеальный газ.

Состояние термодинамической системы характеризуется термодинамическими параметрами. *Термодинамические параметры – это величины характеризующие состояние системы.* К термодинамическим параметрам относятся такие величины, как давление, объём, температура, плотность вещества и т.д. Параметрами состояния идеального газа, например, являются давление $P$, объём $V$, температура $T$. Уравнение, связывающее между собой параметры состояния термодинамической системы, называется *уравнением состояния.* Например, уравнение Менделеева-Клапейрона: $PV = \frac{m}{\mu} RT$.

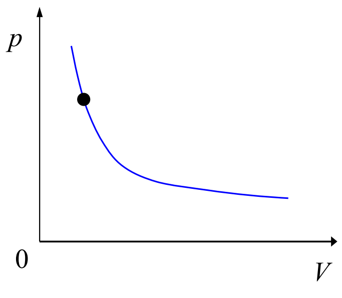
Состояние термодинамической системы называется *равновесным*, если все его параметры имеют определенное значение и не изменяются со временем при неизменных внешних условиях.

Если термодинамическая система выведена из состояния равновесия и предоставлена сама себе, то она возвращается в исходное состояние. Этот процесс называется *релаксацией*.

В термодинамике изучают закономерности всевозможных переходов системы из одного состояния в другое. *Переход системы из одного состояния в другое, который сопровождается изменением хотя бы одного параметра состояния, называется процессом.* Уравнение, определяющее изменение параметров системы при переходе из одного состояния в другое, называется уравнением процесса.

Термодинамика изучает только термодинамически равновесные состояния тел и медленные процессы, которые рассматриваются как равновесные состояния, непрерывно следующие друг за другом. Она изучает общие закономерности перехода систем в состояния термодинамического равновесия.

*Равновесные процессы* – процессы, при которых скорость изменения термодинамических параметров бесконечно мала, т.е. изменение термодинамических параметров происходит за бесконечно большие времена. Это *модель*, т.к. все реальные процессы – неравновесные.
Равновесный процесс – процесс, который проходит через последовательность равновесных состояний.




Любое равновесное состояние может быть изображено точкой.
Следовательно, любой равновесный процесс можно изобразить графически.

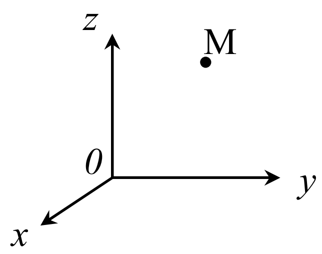
- *Неравновесный процесс* – процесс, при котором изменение термодинамических параметров на конечную величину происходит за конечное время.

Неравновесный процесс графически изобразить нельзя.

В термодинамике используется особый метод изучения явлений – термодинамический метод. Термодинамика рассматривает, как протекает процесс.

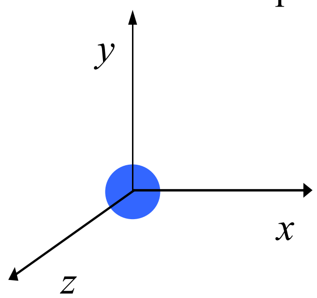
В основу термодинамики положено два основных закона, являющиеся обобщением громадного фактического материала. Эти законы дали начало всей науке термодинамике и поэтому получили название начал.

## 16.1. ВНУТРЕННЯЯ ЭНЕРГИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА. ЧИСЛО СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ




Числом степеней свободы называется наименьшее число независимых координат, которое необходимо ввести, чтобы определить положение тела в пространстве. $i$ – число степеней свободы.

Рассмотрим одноатомный газ. Молекулу такого газа можно считать материальной точкой, положение материальной точки $M$ в пространстве определяется тремя координатами.

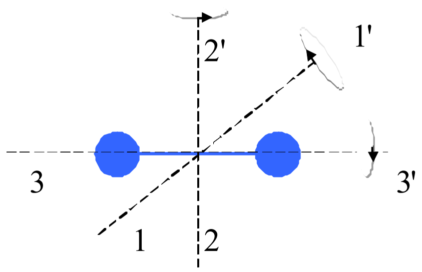



Молекула может двигаться в 3-х направлениях. Следовательно, обладает 3 поступательными степенями свободы.

Молекула – материальная точка.

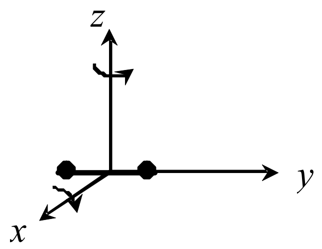
Энергии вращательного движения $\frac{I\omega^2}{2} = 0$, так как момент инерции материальной точки относительно оси, проходящей через точку равен нулю $I = 0$.

**Для молекулы одноатомного газа число степеней свободы $i = 3$.**




Рассмотрим двухатомный газ. В двухатомной молекуле каждый атом принимается за материальную точку и считается, что атомы жёстко связаны между собой, это гантельная модель двухатомной молекулы. *Двухатомная жестко связанная молекула* (совокупность двух материальных точек, связанных недеформируемой связью).

Положение центра масс молекулы задаётся тремя координатами,

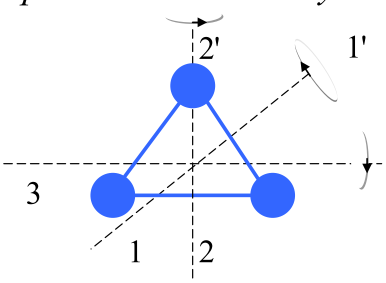



это три степени свободы, они определяют поступательное движение молекулы. Но молекула может совершать и вращательные движения вокруг осей $oz$ и $ox$, это ещё две степени свободы, определяющие вращение молекулы. Вращение молекулы вокруг оси $oy$ невозможно, так как материальные точки не могут вращаться вокруг оси, проходящей через эти точки.

**Для молекулы двухатомного газа число степеней свободы $i = 5$.**

Рассмотрим трёхатомный газ. Модель молекулы – три атома (материальные точки), жёстко связанные между собой.

*Трёхатомная молекула - жестко связанная молекула.*




Молекула обладает 3 поступательными и 3 вращательными степенями свободы.

$i = i_{поступат.} + i_{вращат} = 6.$

**Для молекулы трёхатомного газа число степеней свободы $i = 6$.**

**Для многоатомной молекулы число степеней свободы $i = 6$.**

Для реальных молекул, не обладающих жёсткими связями между атомами, необходимо учитывать также степени свободы колебательного движения, тогда число степеней свободы реальной молекулы равно: $i = i_{поступат.} + i_{вращат.} + i_{колеб}$.

## Закон равномерного распределения энергии по степеням свободы (закон Больцмана)

Закон о равнораспределении энергии по степеням свободы утверждает, если система частиц находится в состоянии термодинамического равновесия, то средняя кинетическая энергия хаотического движения молекул, приходящаяся на 1 степень свободы *поступательного и вращательного* движения, равна $\frac{1}{2}kT$.

Следовательно, молекула, имеющая $i$ степеней свободы, обладает энергией

$$\overline{E}_{к} = \frac{i}{2}kT,$$

$k$ – постоянная Больцмана, $T$ – абсолютная температура газа.

Внутренняя энергия $U$ **идеального газа** – это сумма кинетических энергий всех его молекул.

Находим внутреннюю энергию $U_0$ одного моля идеального газа. $U_0 = \overline{E}_{к} N_A$, где $\overline{E}_{к}$ – средняя кинетическая энергия одной молекулы газа, $N_A$ – число Авогадро (число молекул в одном моле). Постоянная Больцмана $k = \frac{R}{N_A}$. Тогда:

$$U_0 = \overline{E}_{к} N_A = \frac{i}{2}kTN_A = \frac{i}{2}\frac{R}{N_A}TN_A = \frac{i}{2}RT.$$

Если газ имеет массу $m$, то $\frac{m}{\mu}$ – число молей, где $\mu$ – масса моля, и внутренняя энергия газа выражается формулой:

$$U = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2}RT.$$

Внутренняя энергия идеального газа зависит только от температуры газа. Изменение внутренней энергии идеального газа определяется изменением температуры и не зависит от процесса, при котором это изменение произошло.

Изменение внутренней энергии идеального газа:

$$\Delta U = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2}R\Delta T,$$

где $\Delta T$ – изменение температуры.

Закон равномерного распределения энергии распространяется на колебательное движение атомов в молекуле. На колебательную степень свободы приходится не только кинетическая энергия, но и потенциальная, причём среднее значение кинетической энергии, приходящейся на одну степень равно среднему значению потенциальной энергии, приходящемуся на одну степень свободы и равно $\frac{1}{2}kT$.

Следовательно, если молекула имеет число степеней свободы $i = i_{поступат.} + i_{вращат.} + i_{колеб.}$, то средняя суммарная энергия молекулы: $\frac{i}{2}kT$, а внутренняя энергия газа массы $m$:

$$U = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2}RT .$$

**Внутренняя энергия является функцией состояния системы.**

*Функция состояния системы* – функция, однозначно описывающая состояние системы. Её изменение не зависит от пути перехода системы из одного состояния в другое, а только от начального и конечного состояния.

При взаимодействии термодинамической системы с внешней средой её внутренняя энергия изменяется.

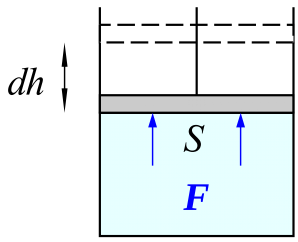
$$\Delta U = U_2 - U_1,$$

$$\Delta U = \frac{i}{2}\frac{m}{M}R(T_2 - T_1).$$

Изменение внутренней энергии системы возможно в результате совершения системой (или над системой) работы или вследствие подведения к системе тепла. Следовательно, возможны два способа изменения внутренней энергии:

1. процесс совершения работы,
2. теплопередача (теплопроводность, конвекция, излучение).

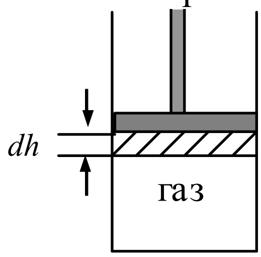
## 16.2. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ РАБОТА. РАБОТА ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА ПРИ ИЗОПРОЦЕССАХ




Принято считать, что если система совершает работу против действия внешних сил, то эта работа положительная.

Если внешние силы совершают работу над системой, то работа отрицательная.

Рассмотрим идеальный газ, находящийся под поршнем в цилиндре.




Газ расширяется, и поршень поднимается на бесконечно малую высоту $dh$. Силу $F$, действующую со стороны газа на поршень, находим по формуле:

$$F = PS,$$

где $P$ – давление газа на поршень, $S$ – площадь поршня. Бесконечно малую работу, совершаемую газом, можно найти по формуле:

$$dA = Fdh = PSdh = PdV ,$$

где $dV$ – бесконечно малое изменение объёма газа. Окончательно:

$$dA = PdV .$$

*Элементарной работой газа называется величина* $\delta A = PdV$. Это выражение остается справедливым для элементарной работы произвольной физически однородной и изотропной термодинамической системы в равновесном процессе.

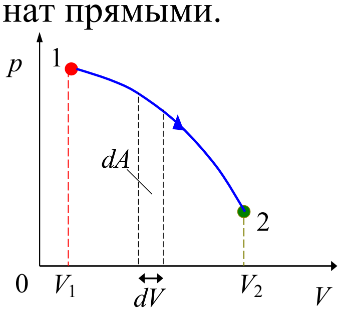
Работа $A_{12}$ термодинамической системы в равновесном процессе перехода из начального состояния с объёмом $V_1$ в конечное состояние с объёмом $V_2$ (работа в конечном процессе) вычисляется интегрированием.

При конечном изменении объёма газа от $V_1$ до $V_2$ работа:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} PdV.$$

Изобразим процесс перехода системы из начального состояния 1 в конечное состояние 2, построив график зависимости $P(V)$. Элементарная работа $\delta A = PdV$ численно равна площади прямоугольника с длинами сторон $P$ и $dV$.

Работа в конечном процессе, когда объём изменяется от $V_1$ до $V_2$, работа равна площади фигуры, ограниченной отрезком $[V_1, V_2]$ оси абсцисс, соответствующим этому отрезку участком графика функции $P(V)$ и проходящими через концы отрезка $[V_1, V_2]$ параллельными оси ординат прямыми.



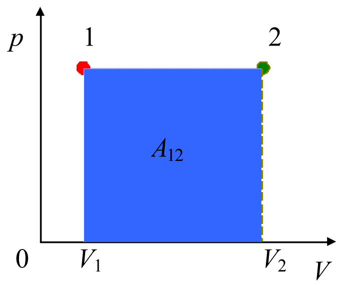

Работа – это мера изменения внутренней энергии системы в процессе совершения работы.

Работа является функцией процесса, но не является функцией состояния.

**Работа идеального газа при изопроцессах**

Вычислим работу идеального газа при изопроцессах.

I) <u>Рассмотрим изобарический процесс</u>.

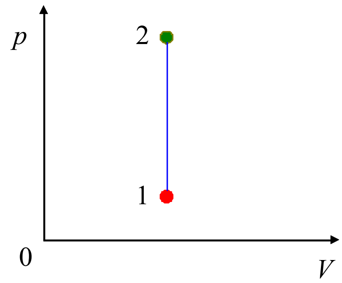



При изобарическом процессе $P = const$. Если в результате этого процесса объём газа изменился от $V_1$ до $V_2$, то работа газа равна:

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} PdV = P\int_{V_1}^{V_2} dV = P(V_2 - V_1);$$

$$A_{12} = P(V_2 - V_1).$$

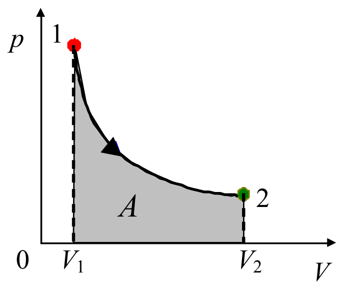
Построим график процесса в координатах $P$, $V$. Работа $A$ графически выражается площадью заштрихованного прямоугольника.




II) <u>Рассмотрим изохорический процесс</u>. При изохорическом процессе $V = const$ и изменение объёма газа $dV = 0$ равно нулю. Следовательно, согласно формулам работа газа при термодинамическом процессе получаем $A$ при изохорическом процессе равной нулю.

III) <u>Рассмотрим изотермический процесс</u>. При изотермическом процессе $T = const$ и внутренняя энергия газа

$$U = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2}RT = const.$$




Изменение внутренней энергии $\Delta U = 0$, так как $\Delta T = 0$.

Если в результате этого процесса объём газа изменился от $V_1$ до $V_2$, то работа газа равна:

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} PdV.$$

Но здесь $P \neq const$. Найдём давление $P$ из уравнения Менделеева–Клапейрона:

$$P = \frac{m}{\mu}\frac{RT}{V}.$$

Тогда

$$dA = \frac{m}{\mu}RT\frac{dV}{V}, \text{ и}$$

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m}{\mu}RT\frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu}RT\ln\frac{V_2}{V_1}.$$

Итак, при изотермическом процессе:

$$A = \frac{m}{\mu}RT\ln\frac{V_2}{V_1}.$$

Строим график процесса в координатах $P, V$.

Работа $A$ графически выражается заштрихованной площадью под изотермой.

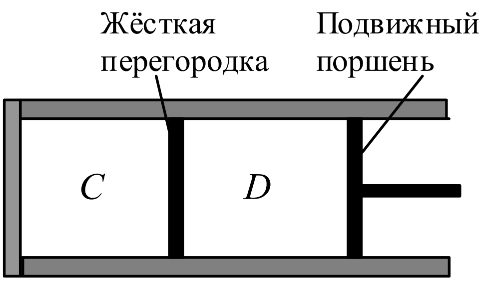
## 16.3. ТЕПЛООБМЕН И КОЛИЧЕСТВО ТЕПЛОТЫ

*Теплообменом* называется процесс передачи внутренней энергии от одного тела к другому, не сопровождаемый совершением макроскопической работы.

*Количеством теплоты* $Q$ называется внутренняя энергия, полученная термодинамической системой путем теплообмена, то есть без совершения над системой макроскопической работы.

## 16.4. ПЕРВОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

Рассмотрим газ в теплоизолированном цилиндре (теплоизолированную термодинамическую систему). Цилиндр разделен жесткой теплопроводящей перегородкой на два отсека $C$ и $D$. Объём отсека $C$ поддерживается постоянным, над этой частью газа не может быть совершена работа. Объём отсека $D$ может меняться при помощи подвижного поршня. За счет теплопроводящей перегородки отсеки могут обмениваться внутренней энергией.




Если в результате совершения над системой $C$+$D$ внешними силами работы $A_{12}^{внеш}$, система перешла из произвольного состояния 1 в произвольное состояние 2, то при этом изменилась внутренняя энергия системы. Тогда $A_{12}^{внеш} = U_2^{C+D} - U_1^{C+D} = U_2^C + U_2^D - U_1^C - U_1^D$.

Тогда $U_1^C - U_2^C = U_2^D - U_1^D - A_{12}^{внеш}$, изменение внутренней энергии газа в отсеке $C$ произошло за счет теплообмена без совершения работы и равно количеству теплоты $Q$, полученному газом через жёсткую перегородку. Обозначим $U_2^D - U_1^D = \Delta U$ изменение внутренней энергии газа в отсеке $D$. Тогда получим:

$Q = \Delta U - A_{12}^{внеш}$. Это равенство является математическим выражением **первого начала термодинамики.** Оно подразумевает, что полученное термодинамической системой количество теплоты $Q$ равно приращению её внутренней энергии $\Delta U$ за вычетом работы над системой внешних сил $A_{12}^{внеш}$.

Если переход системы из состояние 1 в состояние 2 является равновесным, то $A_{12}^{внеш} = -A$, где $A$ – работа системы против внешних сил. В таком случае

$$Q = \Delta U + A.$$

Это выражение представляет собой интегральную форму записи первого начала термодинамики.

Равенство подразумевает, что полученное термодинамической системой в равновесном процессе количество теплоты $Q$ идет на приращение его внутренней энергии $\Delta U$ и совершение работы над внешними телами.

Для бесконечно малого (элементарного) равновесного процесса уравнение принимает вид: $\delta Q = \Delta U + \delta A = dU + PdV$.

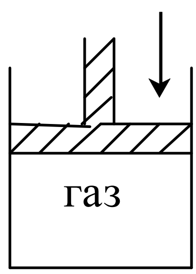
Это выражение представляет собой дифференциальную форму записи первого начала термодинамики.

Первое начало термодинамики – это закон сохранения и превращения энергии.

I начало термодинамики – частный случай всеобщего закона сохранения энергии: $\sum E_i = const$, полная энергия замкнутой системы может изменяться только качественно, количественно оставаясь неизменной.

Таким образом, первое начало термодинамики является фундаментальным постулатом, утверждающим собой закон сохранения энергии. Оно устанавливает закон взаимопревращения теплоты, энергии и работы. За всю историю развития науки не обнаружено опытных фактов, которые противоречили бы этому постулату.

Дифференциальная форма записи закона подчеркивает важные свойства теплоты, энергии и работы. Обратим на это внимание.

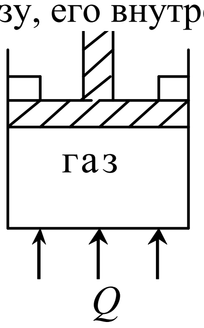



Внутренняя энергия термодинамической системы (или тела) – это сумма всех видов энергии (энергии теплового движения атомов или молекул, потенциальная энергия их взаимодействия и т.п.), заключающихся в данной системе, за исключением энергии, которой система обладает в результате взаимодействия с другими телами. Внутреннюю энергию можно изменить двумя способами.

1. Газ находится под поршнем. Вдвигая поршень, совершаем работу.

Газ сжимается и нагревается, его внутренняя энергия изменяется. Совершение работы – первый способ изменения внутренней энергии тела.

2. Но можно изменить внутреннюю энергию тела и другим способом, не совершая работы $A$, а только подводя к телу тепло. Газ находится под поршнем. Пусть поршень закреплён. При подведении тепла к газу, его внутренняя энергия меняется.




Подведение некоторого количества теплоты – второй способ изменения внутренней энергии тела. Но тогда теплота и работа должны быть эквивалентными формами передачи энергии.

Работа – способ передачи энергии. В процессе работы происходит переход энергии из одного вида энергии в другой.

Теплота – тоже способ передачи энергии.

Внутренняя энергия $U$ является функцией состояния системы (или тела, если система состоит из одного тела). Это означает, что $U$ однозначно определяется термодинамическим состоянием тела, т.е. каждому состоянию тела соответствует одно значение $U$.

Если тело в состоянии 1 имеет энергию $U_1$, а в состоянии 2 – энергию $U_2$, то изменение энергии $\Delta U = U_2 - U_1$ не зависит от того, каким путём совершается переход из одного состояния в другое. Следовательно, бесконечно малое изменение $dU$ внутренней энергии является полным дифференциалом (формула $\delta Q = \Delta U + \delta A = dU + PdV$).

Количества теплоты и работы зависят от пути перехода системы из начального в конечное состояние, они не являются функциями состояния системы, их бесконечно малые изменения $\delta Q$ и $\delta A$ не являются полными дифференциалами, что подчёркивается в записи этих величин в формуле $\delta Q = \Delta U + \delta A = dU + PdV$.

В дальнейшем для записи первого начала термодинамики будут использоваться формулы $Q = \Delta U + A$ и $\delta Q = \Delta U + \delta A = dU + PdV$. В СИ количество теплоты, энергия и работа измеряются в джоулях (Дж).

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Каким методом изучения явлений пользуются в термодинамике?
2. Напишите математическую формулировку первого начала термодинамики. Что такое $\Delta U$, $\Delta A$, $\Delta Q$?

3. Что называется числом степеней свободы?

4. Сколько степеней свободы имеет одноатомный газ? Двухатомный? Трехатомный?

5. Что называется внутренней энергией идеального газа?

6. Напишите, чему равно изменение внутренней энергии идеального газа.

7. Чему равна работа идеального газа при изобарическом процессе? При изохорическом? При изотермическом?

## Лекция 17

# ТЕПЛОЕМКОСТЬ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Термины и понятия

Возбудить
Вымерзать
Вращательная степень свободы
Вращательный квант
Высокая температура
Дискретный ряд значений
Классическая теория теплоемкости
Колебательное движение
Коэффициент Пуассона
Молярная теплоемкость
Низкая температура
Положение равновесия
Порция
Разрыв
Расшатывать (-ся), расшатать
Само собой разумеется
Скачкообразный
Сколь угодно
Скрепленный
Средняя температура
Удельная теплоемкость

## 17.1. ТЕПЛОЕМКОСТЬ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

Теплоемкостью тела называется физическая величина, численно равная количеству теплоты, которое необходимо сообщить телу, чтобы изменить его температуру на один градус: $C_{тела} = \dfrac{\partial Q}{dT}$.

Удельная теплоёмкость $c$ – это физическая величина, равная количеству теплоты, которое необходимо сообщить единице массы этого вещества, чтобы нагреть его на один градус: $C_{уд} = c = \dfrac{\partial Q}{mdT}$.

Молярная теплопроводность $C$ – это физическая величина, равная количеству теплоты, которое необходимо сообщить одному молю вещества, чтобы нагреть его на один градус: $C_{мол} = C = \dfrac{\partial Q}{\frac{m}{\mu}dT}$.

Соотношение между молярной и удельной теплоёмкостью таково:

$$C = \mu c\,. \tag{17.1}$$

Количество теплоты $\Delta Q$, сообщённое газу с удельной теплоёмкостью с и массой $m$, находится по формуле, известной из школьного курса физики:

$$\Delta Q = cm\Delta t, \qquad (17.2)$$

$\Delta t$ – разность температур по шкале Цельсия, $\Delta t = t_2 - t_1$.

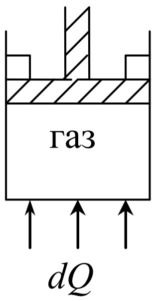
С учётом того, что $\Delta t = \Delta T$, где $\Delta T = T_2 - T_1$ является разностью температур по шкале Кельвина, и формулы (17.1) можно записать формулу (17.2) иначе, а именно:

$$dQ = \frac{m}{\mu} C dT. \qquad (17.3)$$

Для нагревания одной и той же массы газа до одной и той же температуры требуется различное количество тепла в зависимости от того, нагревается ли газ при постоянном объёме или при постоянном давлении, т.е. теплоёмкости газов зависят от условий, при которых нагревается газ.

## Молярные теплоемкости при изопроцессах.

1) Найдём молярную теплоёмкость идеального газа $C_V$ при постоянном объёме. Процесс изохорический. Масса $m$ газа находится под поршнем в цилиндре. К газу подводится количество теплоты $dQ$. Чтобы помешать расширению газа при нагревании, надо закрепить поршень. Тогда газ не сможет поднять поршень, и работа газа против внешних сил равна нулю $\delta A = 0$ при изохорическом процессе.




Запишем первое начало термодинамики:

$$dQ = dU + dA.$$

Так как $dA = 0$, то $dQ = dU$, т.е. тепло, сообщённое газу, идёт исключительно на увеличение внутренней энергии газа.

$$dQ = \frac{m}{\mu} C_V dT,$$

$$dU = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2} R dT.$$

Приравниваем:

$$\frac{m}{\mu} C_V dT = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2} R dT.$$

Получаем:

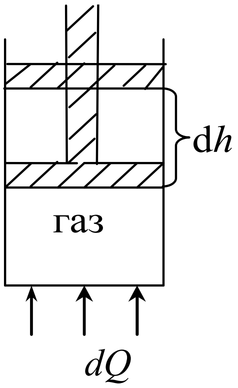
$$C_V = \frac{i}{2} R, \qquad (17.4)$$

$i$ – число степеней свободы молекул газа.

Удельная теплоёмкость при постоянном объёме:

$$c_V = \frac{C_V}{\mu} \text{ или } c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{\mu}.$$

2) Найдём молярную теплоёмкость $C_P$ идеального газа при постоянном давлении. Процесс изобарический. Масса $m$ газа находится под поршнем в цилиндре. Будем нагревать газ при постоянном давлении. Поршень поднимается, газ совершает работу, работа при изобарном процессе равна:




$$A = P(V_2 - V_1),$$

где $V_1$ и $V_2$ – соответственно начальный и конечный объёмы газа. Элементарная работа $dA = PdV$. Из уравнения Менделеева–Клапейрона: $PV = \frac{m}{\mu}RT$

получим $\quad PdV = \frac{m}{\mu}RdT$.

Следовательно, $\quad dA = \frac{m}{\mu}RdT$.

Согласно первому началу термодинамики:

$$dQ = dU + dA,$$

где $\quad dQ = \frac{m}{\mu}C_P\,dT$, а $\quad dU = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2}RdT \quad$ и $\quad dA = \frac{m}{\mu}RdT$.

Подставим выражения $dQ$, $dU$ и $dA$ в первое начало термодинамики:

$$\frac{m}{\mu}C_p dT = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2}RdT + \frac{m}{\mu}RdT,$$

получим

$$C_P = \frac{i}{2}R + R = \frac{i+2}{2}R$$

или

$$C_p = C_V + R. \qquad (17.5)$$

Отношение теплоемкостей при постоянном давлении и при постоянном объеме обозначим буквой $\gamma$: $\qquad \gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{c_p}{c_v}$.

$\gamma$ называется коэффициентом Пуассона. Из формул (17.4) и (17.5) получаем:

$$\gamma = \frac{i+2}{i}. \tag{17.6}$$

Коэффициент Пуассона $\gamma$ зависит только от числа степеней свободы молекул, из которых состоит газ.

Для одноатомного газа $i$ = 3, следовательно, $\gamma = \frac{3+2}{3} = 1,67$;

для двухатомного газа $i$ = 5, следовательно, $\gamma = \frac{5+2}{5} = 1,40$;

для трехатомного газа $i$ = 6, следовательно, $\gamma = \frac{6+2}{6} = 1,33$.

Рассмотренная теория теплоемкости является классической теорией.

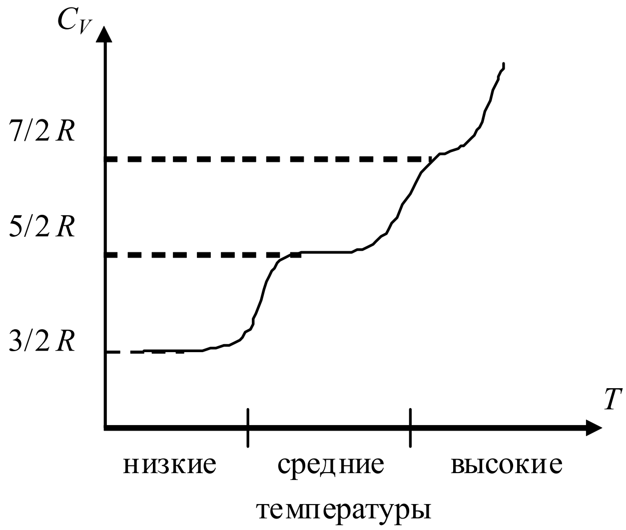
Запишем выводы, которые из нее можно сделать:

1) Молярная теплоемкость газа определяется только числом степеней свободы его молекул и значением универсальной газовой постоянной $R$.

2) Газы, молекулы которых построены из одинакового числа атомов, должны иметь одинаковые молярные теплоемкости. Например, молекулы газов $O_2$, $N_2$, $H_2$ имеют число степеней свободы $i$ = 5, следовательно, $C_p$ и $C_V$ для них одинаковы.

3) Молярные теплоемкости $C_p$ и $C_V$ не зависят от температуры.

## 17.2. ПОНЯТИЕ О КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ТЕПЛОЕМКОСТИ




Классическая теория теплоемкости согласуется с опытными данными только при средних температурах, т.е. температурах, с которыми имеют дело в обычной повседневной жизни. Опыт показывает, что на самом деле теплоемкость газа зависит от температуры. Например, для двухатомного газа водорода $H_2$ по классической теории молярная теплоемкость при постоянном объеме $C_V = \frac{5}{2}R$ при любой температуре. Эксперимент же дает для $H_2$ зависимость, показанную на рисунке. Из рисунка видно, что при низких температурах водород $H_2$ ведет себя как одноатомный газ, при средних температурах – как двухатомный газ, а при высоких температурах – как газ, молекулы которого получили дополнительные степени свободы. Получается, что результаты эксперимента согласуются с классической теорией теплоемкости только при средних температурах. Объяснение этих явлений даётся в квантовой механике.

В классической физике считается само собой разумеющимся, что энергия может меняться непрерывно, т.е. энергия может принимать любые, сколь угодно близкие друг другу значения. Согласно квантовой механике многие физические величины, в том числе энергия, могут принимать только дискретный ряд значений, т.е. энергия, например, может принимать только некоторые значения, а не какие угодно. Скачкообразное изменение (квантование) физической величины - очень характерная черта квантовой механики. Кроме того, в классической теории теплоемкости считается, что все степени свободы равноценны и на каждую степень свободы приходится одна и та же энергия, равная $\frac{1}{2}kT$.

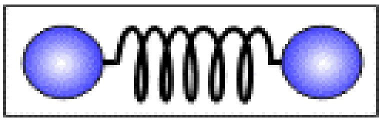
В квантовой механике степени свободы не равноценны: на степени свободы, определяющие поступательное движение, приходится одна энергия, а на степени свободы, определяющие вращательное движение – другая. Чтобы молекула начала вращаться, ей надо сообщить определенную порцию (квант) энергии $\Delta E_{вращ.}$. Молекула может получить эту порцию энергии только путем столкновений с другими молекулами. Энергия теплового движения молекулы прямо пропорциональна $kT$, где $k$ – постоянная Больцмана, $T$ – абсолютная температура газа. При низких температурах величина $kT$ мала,

$$kT << \Delta E_{вращ.},$$

поэтому молекулы, сталкиваясь с другими молекулами, не могут получить от них энергию, равную вращательному кванту $\Delta E_{вращ.}$. При низких температурах молекулы не могут иметь вращательные степени свободы, вращательные степени свободы «вымерзают» при низких температурах, и молекулы газа могут двигаться только поступательно. Число степеней свободы, определяющее поступательное движение, равно трем, т.е. молекулы двухатомного газа ведут себя как молекулы одноатомного газа, обладающие тремя степенями свободы. Молекулярная теплоемкость газа при постоянном объеме $C_V = \frac{3}{2}R$.

При высоких температурах величина $kT$ велика. Энергия теплового движения молекул, пропорциональная величине $kT$, становится настолько большой, что жесткая связь между атомами в двухатомных молекулах начинает расшатываться при столкновениях. Атомы совершают колебания около своих положений равновесия. Модель молекулы перестает быть гантельной моделью, а будет представлять собою два атома, скрепленные пружинкой.

При рассмотрении гантельной модели двухатомной молекулы энергия молекулы складывается из кинетической энергии поступательного движения её центра масс (три степени свободы) и кинетической энергии вращения вокруг него (еще две степени свободы). Но колебательное движение атомов в молекуле требует дополнительных степеней свободы, теперь еще меняется взаимная потенциальная энергия атомов в молекуле. На колебательное движение атомов в молекуле приходится еще две степени свободы. Таким образом, при высоких температурах молекула двухатомного газа обладает семью степенями свободы, и молярная теплоемкость двухатомного газа при постоянном объеме $C_V = \frac{7}{2}R$.



При дальнейшем повышении температуры колебания атомов в молекуле становятся настолько интенсивными, что молекулы диссоциируют, т.е. распадаются на составляющие их атомы. На диссоциацию требуется большая энергия, $C_V$ начинает резко возрастать, практически все подводимое тепло идет на разрыв внутримолекулярных связей, и температура газа почти не повышается.

При средних температурах величина $kT$ достаточно велика, чтобы возбудить вращение молекулы, и в то же время достаточно мала, чтобы расшатать связи между атомами в молекуле. При средних температурах молекула двухатомного газа обладает пятью степенями свободы и $C_V = \frac{5}{2}R$, т.е. при средних температурах классическая и квантовая теории теплоемкости дают одинаковые результаты.

## 17.3. АДИАБАТНЫЙ ПРОЦЕСС

Адиабатным (адиабатическим) процессом называется процесс, идущий без теплообмена с окружающей средой.

$dQ = 0$ – уравнение адиабатного процесса.

Адиабатный процесс можно осуществить двумя способами:

1) осуществить хорошую теплоизоляцию, что практически довольно трудно сделать;
2) провести процесс настолько быстро, чтобы не успел произойти теплообмен с окружающей средой. Например, распространение звука – процесс практически адиабатный.

Теплоёмкость адиабатического процесса равна нулю: $C_{ад} = \dfrac{dQ}{\frac{m}{\mu} dT} = 0$.

Получим уравнение адиабатного процесса. Согласно первому началу термодинамики:

$$dQ = dU + dA.$$

Но для адиабатного процесса $dQ = 0$, следовательно

$$dA = -dU.$$

Работа при адиабатном процессе может производиться лишь за счет изменения внутренней энергии.

Так как $dA = PdV$, а $dU = \dfrac{m}{\mu}\dfrac{i}{2}RdT$,

то
$$PdV = -\frac{m}{\mu}\frac{i}{2}RdT. \qquad (17.7)$$

Это уравнение нельзя проинтегрировать, так как здесь три переменные $P$, $V$ и $T$. Уравнение, связывающее все три переменные – это уравнение Менделеева-Клапейрона: $PV = \dfrac{m}{\mu}RT$.

Найдем давление $P = \dfrac{m}{\mu}\dfrac{RT}{V}$ и подставим в уравнение (17.7):

$$\frac{m}{\mu}\frac{RT}{V}dV = -\frac{m}{\mu}\frac{i}{2}RdT.$$

Разделим переменные

$$\frac{dT}{T} = -\frac{2}{i}\frac{dV}{V},$$

проинтегрируем

$$\int_{T_1}^{T_2}\frac{dT}{T}=-\frac{2}{i}\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V};$$

$$ln\frac{T_2}{T_1}=-\frac{2}{i}ln\frac{V_2}{V_1}. \qquad (17.8)$$

Коэффициент Пуассона $\gamma=\dfrac{i+2}{i}$, отсюда $\dfrac{2}{i}=\gamma-1$.

Уравнение (17.8) теперь можно записать в виде

$$T_1V_1^{\gamma-1}=T_2V_2^{\gamma-1}$$

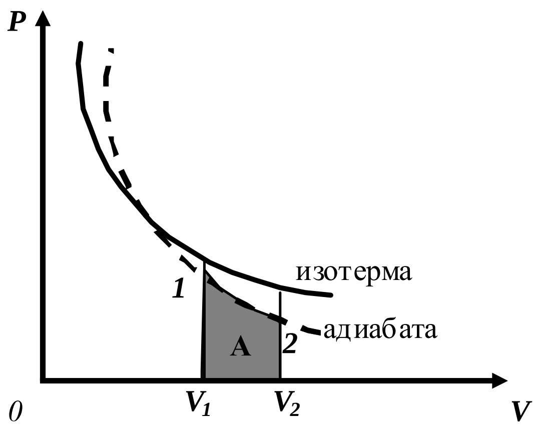
или в виде

$$TV^{\gamma-1}=const. \qquad (17.9)$$

Это уравнение адиабатного процесса.

Если из уравнения Менделеева-Клапейрона найти объем газа $V$ и подставить его в формулу (17.9), то уравнение адиабатного процесса запишется в виде:

$$TP^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}=const.$$




Если же из уравнения Менделеева-Клайперона найти температуру газа $T$ и подставить в формулу (17.9), то уравнение адиабатного процесса запишется в виде

$$PV^{\gamma}=const. \qquad (17.10)$$

В таком виде уравнение адиабатного процесса записывается чаще всего. На рисунке видно, что в координатах $P$, $V$ адиабата, кривая характеризующая адиабатный процесс, идет круче чем изотерма.

Найдем работу при адиабатном процессе:

$$dA=-dU,$$

где

$$dU=\frac{m}{\mu}\frac{i}{2}RdT.$$

Работа

$$A=\int dA=-\frac{m}{\mu}\frac{i}{2}R\int_{T_1}^{T_2}dT=-\frac{m}{\mu}\frac{i}{2}R(T_2-T_1)=\frac{m}{\mu}\frac{i}{2}RT_1\left(1-\frac{T_2}{T_1}\right).$$

Учитывая, что $\frac{i}{2}=\frac{1}{\gamma-1}$ и $\frac{T_2}{T_1}=\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}$, получим:

$$A=\frac{m}{\mu}\frac{RT_1}{\gamma-1}\left\{1-\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right\}.$$

Работа $A$ графически выражается заштрихованной площадью под адиабатой. При адиабатическом расширении (процесс $1\rightarrow 2$ на рисунке) работа, совершаемая газом, меньше работы, совершаемой при изотермическом расширении при одинаковом изменении объёма, т.к. при адиабатическом расширении происходит охлаждение газа, а при изотермическом расширении температура газа $T$ поддерживается постоянной за счёт притока $dQ$ извне.

## 17.4. ПОЛИТПРОПИЧЕСКИЙ ПРОЦЕСС

*Политропическим процессом* называется процесс, в котором теплоемкость термодинамической системы постоянна: $C=\frac{dQ}{\frac{m}{\mu}dT}=const$. Показателем политропического процесса (показатель политропы) называется величина $n=\frac{C-C_P}{C-C_V}$, где $C$ – молярная теплоёмкость системы в политропическом процессе, $C_P$ и $C_V$ – молярные теплоёмкости при постоянном давлении и постоянном объёме соответственно.

Выведем уравнение политропического процесса идеального газа. Запишем уравнение первого начала термодинамики: $dQ=dU+dA$.

Так как $dQ=C\frac{m}{\mu}dT$, то $C\frac{m}{\mu}dT=dU+dA$ или $C\frac{m}{\mu}dT=dU+PdV$.

Изменение внутренней энергии не зависит от процесса и равно $dU=\frac{m}{\mu}\frac{i}{2}RdT=\frac{m}{\mu}C_V RdT$. Выразим давление из уравнения Менделеева-Клапейрона: $P=\frac{m}{\mu}\frac{RT}{V}$ или, учитывая, что $C_P=C_V+R$, можно записать $P=\frac{m}{\mu}\frac{(C_P-C_V)T}{V}$.

Подставим полученные выражения в уравнение первого начала термодинамики и выполним простые преобразования.

$$C\frac{m}{\mu}dT = \frac{m}{\mu}C_V dT + \frac{m}{\mu}\frac{(C_P - C_V)T}{V}dV,$$

$$\frac{dT}{T} + \frac{C_P - C_V}{C_V - C}\frac{dV}{V} = 0 \text{ или } \frac{dT}{T} + (n-1)\frac{dV}{V} = 0,$$

где $n - 1 = \dfrac{C_P - C_V}{C_V - C}$, тогда $n = \dfrac{C - C_P}{C - C_V}$, а уравнение $\dfrac{dT}{T} + (n-1)\dfrac{dV}{V} = 0$ можно проинтегрировать. Уравнение политропического процесса в переменных $T$ и $V$ имеет вид: $TV^{n-1} = const$. Исключим температуру с помощью уравнения состояния и запишем уравнение политропы в переменных $P$ и $V$: $PV^n = const$.

Все изопроцессы являются частным случаем политропического процесса:

$PV^{\gamma} = const, \quad n = \gamma - адиабата.$

$PV = const, \qquad n = 1 - изотерма.$ Теплоёмкость изотермического процесса: $C_T = \pm\infty$.

$P = const, \qquad n = 0 - изобара.$ Теплоёмкость изобарического процесса величина постоянная: $C_P = C_V + R$.

Теплоёмкость изохорического процесса величина постоянная и равная $C_V$, тогда показатель политропы $n = \pm\infty$.

$PV^n = const, \qquad P^{\frac{1}{n}}V = const, \quad n = \pm\infty \Rightarrow V = const - изохора.$

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называется удельной теплоемкостью? Молярной? Напишите соотношение между ними.
2. Чему равна молярная теплоемкость газа при постоянном объеме?
3. Чему равна молярная теплоемкость газа при постоянном давлении?
4. Что называется коэффициентом Пуассона? Как выражается коэффициент Пуассона через число степеней свободы?
5. Какие выводы можно сделать из классической теории теплоемкости? Как эти выводы согласуются с экспериментальными данными?
6. Дайте понятие о квантовой теории теплоемкости.

## Лекция 18

# ЦИКЛИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ. ТЕПЛОВАЯ МАШИНА

Термины и понятия

Адиабата
Адиабатический процесс
Возвратить (-ся), возвращать (-ся)
Двигатель
Замкнутый процесс
Цикл Карно
Круговой процесс
Коэффициент полезного действия
Нагреватель
Насос
Обратный цикл
Обратимый процесс
Петля
Подключать
Потеря, потерять
Прямой цикл
Приведенное количество теплоты
Производить
Рабочее тело
Резервуар
Теплообмен
Цикл
Цилиндр
Холодильная машина
Холодильник

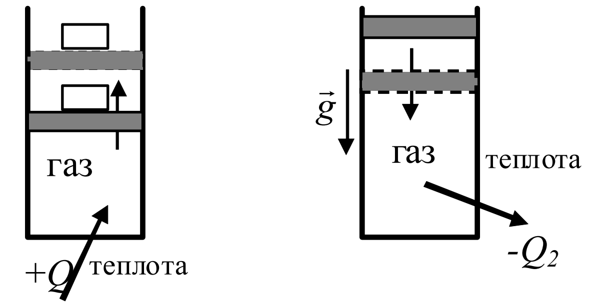
## 18.1. КОЭФФИЦИЕНТ ПОЛЕЗНОГО ДЕЙСТВИЯ ТЕПЛОВОЙ МАШИНЫ. ПРЯМОЙ ЦИКЛ

Прежде чем перейти ко второму началу термодинамики, необходимо рассмотреть замкнутые процессы, эти процессы называются также круговыми процессами или циклами. Круговым процессом (или циклом) называется такой процесс, в результате которого термодинамическая система, претерпев ряд изменений, возвращается в исходное состояние.

Круговой процесс может быть равновесным или неравновесным. Всякий равновесный процесс представляет непрерывную последовательность равновесных состояний термодинамической системы. Равновесные состояния – это такие состояния, в которых все параметры системы имеют определенные значения и остаются постоянными до тех пор, пока не изменятся внешние условия. В равновесном процессе внешние условия изменяются настолько медленно, что термодинамическая система успевает прийти в равновесие с окружающей средой. Всякий равновесный процесс является **обратимым**: термодинамическую систему можно вернуть из конечного состояния в начальное, и при этом во внешней среде не произойдет никаких изменений. Это означает, что в обратном процессе система пройдет через те же состояния, через которые она проходила в прямом процессе.

**Тепловой машиной** называется любое периодически действующее устройство, которое производит работу за счет получаемой извне теплоты. *Прямым круговым процессом (циклом тепловой машины)* называется цикл, в котором полученная извне теплота превращается в полезную работу. *Обратным круговым процессом (циклом холодильной машины)* называется цикл, в котором полученная извне работа затрачивается на перенос теплоты от менее нагретых тел к более нагретым телам. Если тело (термодинамическая система) производит работу за счет внутренней энергии теплого резервуара, то его называют **рабочим телом тепловой машины или просто рабочим телом.** Система может состоять из одного рабочего тела.

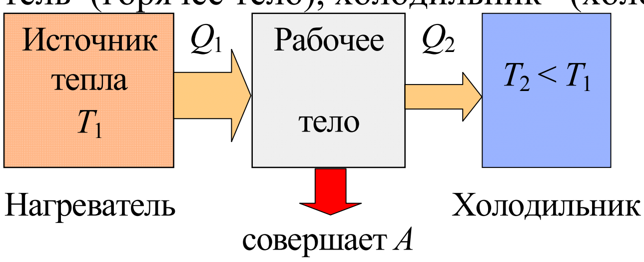
Пример простейшей тепловой машины: идеальный газ, заключенный в вертикальном цилиндре с подвижным поршнем. Если на поршень поставить груз и нагревать газ в цилиндре, то в результате нагревания газ расширяется и совершает полезную работу по поднятию груза (газ получает теплоту $Q_1$). Если груз убрать и прекратить нагревание газа, то газ отдает тепло в окружающую среду (газ отдает теплоту $Q_2$) и его объём уменьшается. Среда выполняет роль холодильника. Поршень вернется в начальное состояние. Таким образом, мы имеем модель периодически действующего устройства (тепловой машины), которое превращает в полезную работу (подъём груза) часть тепла, полученного из внешней среды.

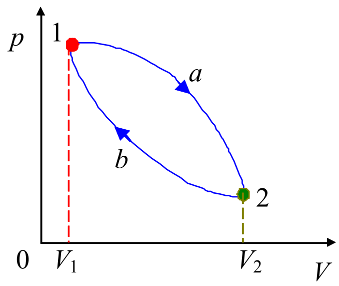



нагревание, расширение газа, подъём груза

охлаждение, сжатие газа

Таким образом, модель простейшей тепловой машины: нагреватель (горячее тело), холодильник (холодное тело), рабочее тело (газ). От нагревателя отбирается теплота $Q_1$, которая расходуется на совершение работы $A$, холодильнику передаётся теплота $Q_2$.



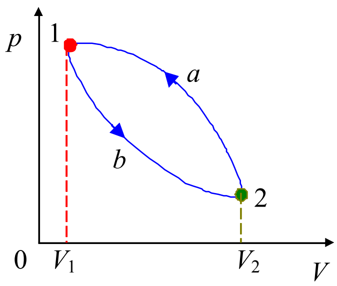



Прямой цикл
протекает по часовой стрелке
$A$ *за цикл* $> 0$
$A = A_{1a2} - A_{2b1}$

Графически представлением циклов тепловой машины и холодильной машины в координатах $P,V$ являются замкнутые линии.

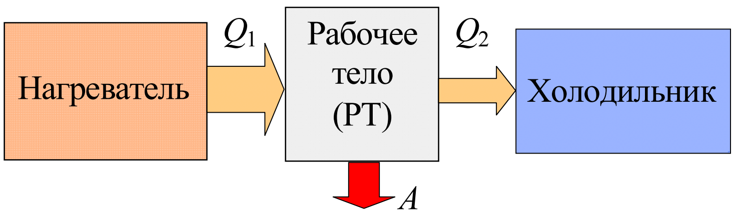
Если при совершении цикла обход замкнутой линии осуществляется по часовой стрелке, то полезная работа $A$ цикла положительная. В этом случае это цикл **тепловой машины**.

Если при совершении цикла обход замкнутой линии осуществляется против часовой стрелки, то полезная работа $A$ цикла отрицательная. В этом случае это цикл **холодильной машины.**

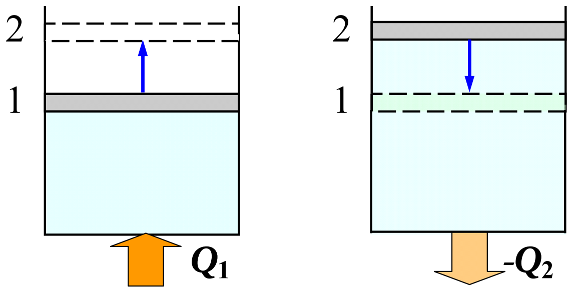



Обратный цикл
протекает против часовой стрелки
$A$ *за цикл* $< 0$
$A = A_{2b1} - A_{1a2}$

Итак, циклически действующее устройство, превращающее теплоту в работу, называется *тепловой машиной* или *тепловым двигателем*.

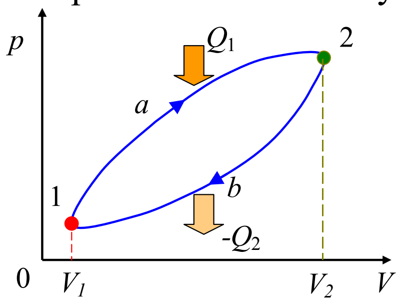



$Q_1$ – тепло, получаемое рабочим телом от нагревателя,
$Q_2$ – тепло, передаваемое рабочим телом холодильнику,
$A$ – полезная работа (работа, совершаемая рабочим телом при передаче тепла).




В цилиндре находится газ – рабочее тело.
Начальное состояние рабочего тела на диаграмме $p(V)$ изображено точкой 1.

Цилиндр подключают к нагревателю, рабочее тело нагревается и расширяется, рабочее тело переходит в состояние 2. Это состояние на диаграмме $p(V)$ изображено точкой 2. Рассмотрим произвольный круговой прямой цикл. Пусть рабочее тело перешло из состояния 1 в состояние 2 по кривой 1*a*2. Рабочим телом является идеальный газ. Значит, идеальный газ расширился, его объем изменился от $V_1$ до $V_2$. Газ совершил положительную работу $A_1$.




Процесс 1*a*2: $Q_1 = U_2 - U_1 + A_1$ – первое начало термодинамики.
Работа $A_1$ равна площади под кривой 1*a*2.

Вернем газ в исходное состояние (в состояние 1). Для этого газ нужно сжать, то есть совершить работу над газом. Пусть сжатие газа происходит по кривой 2*б*1 (направление процесса указано стрелкой). Обозначим $A_2$ – работа, которая совершается при сжатии газа. Если внешние силы совершают работу над системой, то работа считается отрицательной. Следовательно, $A_2 < 0$. Графически $A_2$ выражается площадью под кривой 2*б*1.

Рабочее тело вернулось в исходное состояние. Система совершила цикл. Полезная работа $A$ графически выражается площадью петли 1*a*2*б*1.

Суммарная (полезная) работа, совершенная в результате этого цикла равна разности площадей: площадь под кривой 1*a*2 минус площадь под кривой 2*б*1 или $A_1 - A_2$. Таким образом,

$$A = A_1 + (-A_2) = A_1 - A_2.$$

Вычислим коэффициент полезного действия (КПД) этого цикла. **Коэффициент полезного действия тепловой машины (КПД)** равен отношению произведенной машиной за цикл полезной работы $A$ к полученной извне теплоте $Q_1$: $\eta = \dfrac{A}{Q_1}$.

Применим к циклу тепловой машины первое начало термодинамики: $Q = \Delta U + A$, где $Q$ – полученное рабочим телом количество теплоты за цикл, $\Delta U$ – приращение внутренней энергии рабочего тела за цикл. Так как внутренняя энергия является функцией состояния, её приращение за цикл равно нулю: $\Delta U = 0$. Величина $Q$ – алгебраическая сумма теплоты, полученная рабочим телом за цикл, в процессах нагревания и охлаждения. Тогда $Q = Q_1 - Q_2$.

$Q = \Delta U + A$, так как $\Delta U = 0$, то $Q = A = Q_1 - Q_2$.

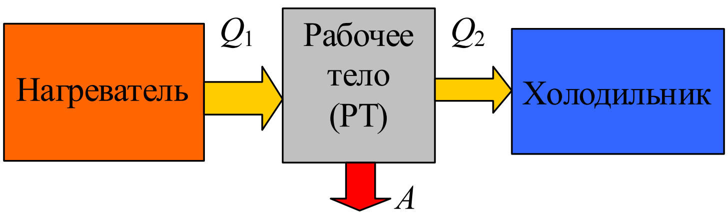
Коэффициент полезного действия, сокращенно, КПД тепловой машины $\eta$ – это отношение работы к количеству теплоты, полученной от нагревателя.

$$\eta = \frac{A}{Q_1} \qquad \text{или} \qquad \eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}.$$

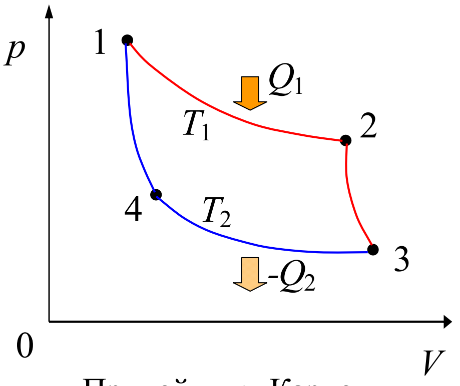
Так как $Q_2 < Q_1$, то КПД тепловой машины всегда меньше единицы. Отсюда вывод, что **тепло нельзя превратить в работу без необратимых потерь**.

## 18.2. ЦИКЛ КАРНО

В природе и технике существует бесконечное количество циклов. Но тогда возникает вопрос, какой цикл из всех существующих циклов является самым экономичным, т.е. какой цикл имеет наибольший коэффициент полезного действия (КПД)? Такой цикл был предложен французским инженером Карно в 1824 г. Циклом Карно называется цикл тепловой машины, которая связана только с двумя тепловыми резервуарами: нагревателем и холодильником.




Цикл Карно состоит из двух равновесных изотермических процессов и двух равновесных адиабатических процессов. В качестве рабочего тела используется идеальный газ. Тепловую машину, работающую по циклу Карно, называют машиной Карно или идеальной тепловой машиной.




Прямой цикл Карно.

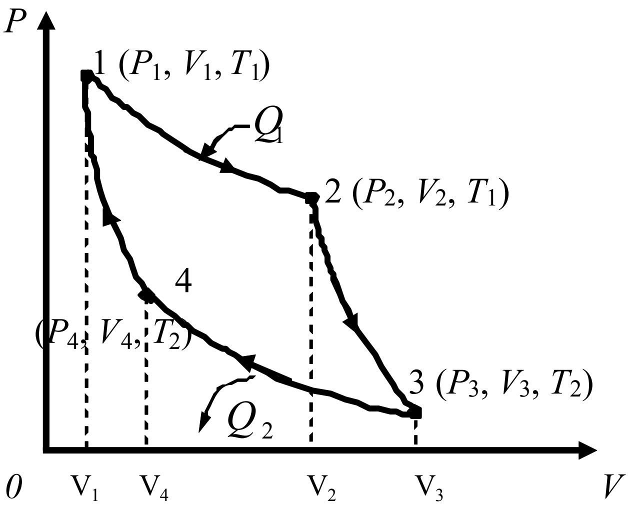
1–2: изотерма – от нагревателя получено тепло $Q_1$.

2–3: адиабата – расширение, тепло не подводится.

3–4: изотерма – тепло $Q_2$ передаётся холодильнику.

4–1: адиабата – сжатие, тепло не подводится.

Рассмотрим прямой цикл Карно с идеальным газом. Цикл Карно состоит из четырех процессов: двух изотерм и двух адиабат.
1) Пусть сначала газ находится в состоянии 1, которое характеризовалось давлением $P_1$, объемом $V_1$ и температурой $T_1$: $V_1$, $T_1$, $P_1$ – начальные параметры рабочего тела. Заставим газ изотермически расширяться до тех пор, пока его параметры станут равными $V_2$, $T_1$, $P_2$ (направление процессов показаны стрелкой). Температура $T_1$ при изотермическом процессе не меняется и изменение внутренней энергии газа $\Delta U$ при этом процессе тоже равно нулю. Чтобы газ изотермически расширялся, он должен получить от нагревателя количество теплоты $Q_1$. При изотермическом процессе количество теплоты $Q_1$ равно работе расширения, совершаемой газом при переходе из состояния 1 в состояние 2: $Q_1 = RT_1 \ln\frac{V_2}{V_1}$.




2) Из состояния 2 заставим газ адиабатически расширяться до состояния 3, где его параметры станут равными $P_3V_3$, а температура примет значение $T_2 < T_1$. Падение температуры связано с работой газа при адиабатном расширении. При адиабатном процессе к газу тепло не подводится, и

газ совершает работу за счет своей внутренней энергии, в результате газ охлаждается.

3) Из состояния 3 начнем сжимать изотермически газ до состояния 4, характеризуемого параметрами $V_4$, $P_4$ и $T_2$. Над газом совершается работа. При изотермическом процессе $\Delta U = 0$ и чтобы внутренняя энергия рабочего тела, т.е. идеального газа, не изменилась, тело должно отдавать какое-то количество тепла $Q_2$ холодильнику:

$$-Q_2 = RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3} \quad \text{или} \quad Q_2 = RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}.$$

4) Из состояния 4 адиабатно сжимаем газ так, чтобы он принял исходные параметры $V_1$, $T_1$, $P_1$, т.е. вернулся в состояние 1. Над газом совершается работа, газ нагревается до температуры $T_1$, так как теплоотдачи при адиабатическом процессе нет. Находим КПД цикла Карно:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}}.$$

Для двух адиабат 2–3 и 4–1 цикла Карно запишем их уравнения:

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1} \quad \text{и} \quad T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1}.$$

Делим почленно первое уравнение на второе, получим:

$$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{\gamma-1} \quad \text{или} \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}.$$

Подставив это выражение в формулу для КПД, и произведя необходимые сокращения, имеем:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

где $T_1$ – температура нагревателя, $T_2$ – температура холодильника. Обе температуры определяются по шкале Кельвина.

Обратим внимание, что изотермический и адиабатический процессы в цикле Карно являются равновесными и, следовательно, обратимыми. Поэтому цикл Карно в целом обратим.

Цикл Карно является единственным равновесным и обратимым циклом среди всех возможных циклов, совершаемых при наличии нагревателя и холодильника. Действительно, процесс теплообмена с окружающей средой должен быть изотермическим, потому что только при этих условиях температура рабочего тела и нагревателя совпадают(это же можно сказать и про холодильник). Так как температуру рабочего тела необходимо периодически изменять, то в процессе изменения температуры рабочее тело должно быть изолировано от окружающей среды (от нагревателя и холодильника). Следовательно, изменение температуры возможно только при адиабатическом процессе. Итак, равновесный цикл тепловой машины при наличии нагревателя и холодильника должен состоять из двух изотерм и двух адиабат.

Сформулируем некоторые выводы.

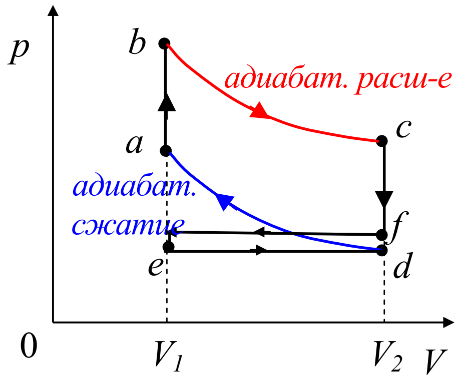
1. При данных нагревателе и холодильнике можно осуществить обратимые циклы Карно с помощью различных машин, имеющих, например, различные рабочие тела. Так как КПД машины, работающей по циклу Карно определяется только температурой нагревателя и температурой холодильника $\eta = \dfrac{T_1 - T_2}{T_1}$, то **обратимые машины, работающие по циклу Карно, имеют одинаковый коэффициент полезного действия.** Это утверждение носит название **первой теоремы Карно.** Другими словами первая теорема Карно может быть сформулирована следующим образом: коэффициент полезного действия цикла Карно не зависит от природы рабочего тела и конструктивных особенностей машины.

2. Рассмотрим тепловую машину, которая совершает произвольный (обратимый или необратимый) круговой процесс, обмениваясь теплом только с нагревателем и холодильником при температурах $T_1$ и $T_2$. **Вторая теорема Карно утверждает, что КПД любой тепловой машины, обменивающейся теплом только с нагревателем при температуре $T_1$, и холодильником при температуре $T_2$ не может быть больше КПД тепловой машины, работающей по циклу Карно с теми же температурами нагревателя и холодильника.**

Тогда, зная что коэффициент любой тепловой машины равен $\eta = \dfrac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$, а коэффициент машины, работающей по циклу Карно равен $\eta_к = \dfrac{T_1 - T_2}{T_1}$ и коэффициент машины, работающей по циклу Карно всегда больше, чем коэффициент полезного действия любой машины $\eta_к > \eta$, имеем: $\dfrac{Q_1 - Q_2}{Q_1} < \dfrac{T_1 - T_2}{T_1}$.

По циклу Карно работает *машина Карно* – самая эффективная тепловая машина, у которой теоретический КПД много больше, чем КПД любой другой машины, работающей по любому циклу (например, двигатель внутреннего сгорания).

Четырёхтактный бензиновый автомобильный двигатель.




Четырёхтактный т.к. в течение каждого полного цикла поршень дважды находится в крайнем нижнем и дважды в крайнем верхнем положении.

*a* – сжатая воздушно-горючая смесь поджигается свечой зажигания.

*a–b*: после воспламенения давление резко возрастает.

*c* – адиабатическое расширение закончено, открывается выпускной клапан.

*c–f*: нагретый сжатый газ быстро вытекает через выпускной клапан.

*f–e* – поршень выталкивает остатки отработанной смеси, выпускной клапан закрывается, а впускной открывается.

*f –d* – свежая порция воздушно-горючей смеси наполняет цилиндр, впускной клапан закрывается.

*d–a*: свежая порция смеси сжимается адиабатически.

В идеальном цикле считается, что точки *f* и *d* совпадают, путь *fe* и *ed* совпадают и никакой работа на пути *fed* не совершается. Тогда КПД цикла по определению: $\eta = \dfrac{A}{\Delta Q_{ab}}$,

*A* – полная механическая работа, совершаемая двигателем за 1 цикл, $\Delta Q_{ab}$ – теплота сгорания топлива, потребляемого за 1 цикл. Выполнив несложные преобразования, получим: $\eta = 1 - \left(\dfrac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}$. Величина $(\dfrac{V_1}{V_2})$ называется степенью сжатия. Чем больше степень сжатия, тем выше КПД.

Теоретическое значение $\eta$ = 0,56 для степени сжатия $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{1}{8}$ и $\gamma = 1{,}4$.

Сравнение машины Карно с двигателем внутреннего сгорания.

При горении бензина $T_1 \sim 2700$ К; холодильник – окружающий воздух $T_2 \sim 300$ К.

К.п.д. $\eta_{Карно} = \dfrac{2700-300}{2700} = 0{,}89.$

К.п.д. тепловых электростанций (если считать, что работают по циклу Карно):

$T_1 = 373$ К – кипение воды,

$T_2 = 273$ К – замерзание воды,

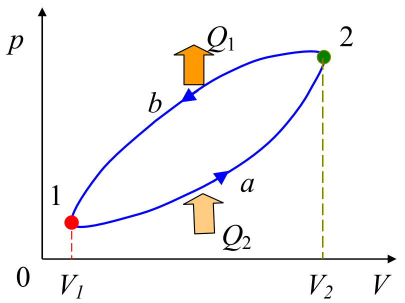
$\eta = \dfrac{373-273}{373} = 0{,}27$ – очень маленький.

Необходимо повышать $T_1$, т.е. воду нагревать под давлением. Следовательно, она будет закипать при более высокой $T_1 \approx 500$ К и $\eta \geq 40\%$.

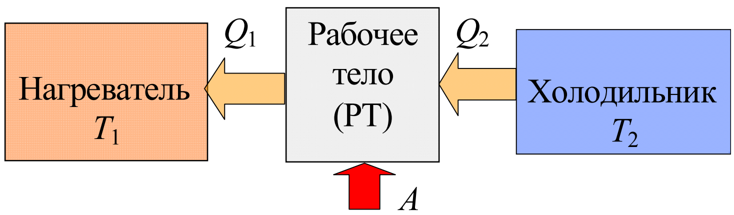
## 18.3. ОБРАТНЫЙ ЦИКЛ. ПРИНЦИП ДЕЙСТВИЯ ХОЛОДИЛЬНОЙ МАШИНЫ

Тепловую машину, работающую по циклу Карно, можно запустить в обратном направлении за счет совершения над ней работы. В этом случае тепловая машина работает как холодильная машина. Для приведения машины в действие требуется совершить над ней работу $A_{внеш}$, равную по абсолютной величине и противоположную по знаку работе $A$, которую производит машина при её работе по прямому циклу.

Отличительной особенностью холодильной машины является то, что температура рабочего тела в процессе его сжатия выше, чем в процессе расширения. Благодаря этому теплота $Q_2$ отбирается от менее нагретых тел и передается более нагретым телам $Q_1$. Холодильная машина работает по обратному циклу.




1$a$2: расширение рабочего тела с поглощением $Q_2$,
2$b$1: сжатие рабочего тела с передачей нагревателю $Q_1$.

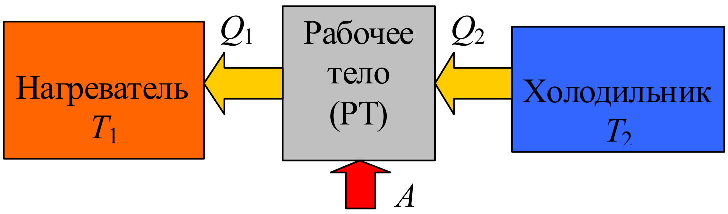



$Q_2$ – тепло отнятое от холодного тела.
$Q_1$ – тепло переданное нагревателю (более горячему телу).
$A = Q_2 - Q_1$ – работа, затрачиваемая на передачу тепла от более холодного к более горячему телу.

Пусть рабочее тело перешло из состояния 1 в состояние 2 по кривой 1$a$2 (направления процессов показаны на рисунке стрелкой). Кривая 1$a$2 – это кривая расширения газа. Газ сам совершает работу $A_2$, графически выражаемую площадью под кривой 1$a$ 2 $A_2 > 0$. Сжатие газа происходит по кривой 2б1. Работа $A_1$ графически выражается площадью под кривой 2б1. Графически суммарная работа выражается площадью петли цикла и равна $A_1 - A_2$. Суммарная работа, совершенная в результате этого цикла равна разности работ по расширению и сжатию рабочего тела:

$$-A = A_2 - A_1 < 0,$$

так как по абсолютному значению $|A_1| > |A_2|$. Так как суммарная работа отрицательна ($A < 0$), то получается, что не рабочее тело совершило работу против внешних сил, а наоборот, внешние силы совершили работу над телом. Для приведения машины в действие внешние силы должны совершить положительную работу $A_{внеш}$, равную по абсолютной величине и противоположную по знаку работе $A$: $A_{внеш} = -A$. Таким образом система преобразует работу в теплоту: в одной части цикла в систему поступает теплота, а в другой – система отдает теплоты больше, чем получает. Сама же система возвращается в начальное состояние. Таким образом, результат цикла состоит в том, что тело с меньшей температурой, от которого система получает тепло, охлаждается. А тело с большей температурой, которому тело отдает тепло, нагревается. Такая машина, работающая по обратному циклу, называется **холодильной машиной или нагревателем (тепловым насосом) в зависимости от назначения.** Схематично работу холодильной машины можно представить так:




Обратным циклом называется цикл, на осуществление которого расходуется работа со стороны внешних по отношению к системе сил.

Если $Q_2$ – количество теплоты, полученное рабочим телом при расширении, а ($-Q_1$) – количество теплоты, отданное им при сжатии, то записав первое начало термодинамики для цикла: $Q = \Delta U + A$, но $\Delta U = 0$, потому, что система вернулась в начальное состояние, тогда $Q = A$, где

$$-Q_1 = U_2 - U_1 - A_1,$$

$$Q_2 = U_1 - U_2 + A_2$$

и сложив, правые и левые части этих уравнений, получим:

$$Q_2 - Q_1 = A_2 - A_1 = -A \text{ , тогда } Q_1 = Q_2 + A$$

Эффективность машины, работающей по обратному циклу, характеризуется двояко в зависимости от назначения.

Эффективность машины можно оценить по способности повышения температуры тела с более высокой температурой $T_1$. В таком случае машина действует как **нагреватель (тепловой насос)**. Её эффективность характеризуется коэффициентом, который определяется отношением количества теплоты, переданного на нагревание, к затраченной на это работе внешних сил: $\xi_1 = \dfrac{|Q_1|}{|A_{внеш}|} = \dfrac{T_1}{T_1 - T_2} = \dfrac{1}{1-(T_2/T_1)} = \dfrac{1}{\eta}$.

Эффективность машины можно оценить по способности понижения температуры тела с более низкой температурой $T_2$. В таком случае машина действует как **холодильная машина**. Её эффективность характеризуется коэффициентом, который определяется отношением количества теплоты отнятого у холодного тела к затраченной на это работе внешних сил: $\xi_2 = \dfrac{|Q_2|}{|A_{внеш}|} = \dfrac{T_2}{T_1 - T_2} = \dfrac{1}{\eta} - 1$.

Пример 1. Рассчитаем эффективность холодильной машины в таких условиях: в помещении необходимо поддерживать температуру $18^0$С, температура наружного воздуха $35^0$С, причём количество теплоты, выделяемой людьми и всеми агрегатами, находящимися в помещении в единицу времени равна 418 *Вт*: $\xi_2 = \dfrac{|Q_2|}{|A_{внеш}|} = \dfrac{T_2}{T_1 - T_2} = \dfrac{291}{17} = 17{,}1$.

Следовательно мощность холодильной машины (работа внешних сил в единицу времени), обеспечивающей такую температуру в помещении должна быть $P_{холод} = \dfrac{Q_2}{\xi_2} = 24{,}4\,Вт.$

Пример 2. Рассчитаем эффективность машины, работающей как тепловой насос в таких условиях: в помещении необходимо поддерживать температуру $35^0$С, температура наружного воздуха $18^0$С, причём количество теплоты, выделяемой людьми и всеми агрегатами, находящимися в помещении в единицу времени равна 418 *Вт*: $\xi_1 = \dfrac{|Q_1|}{|A_{внеш}|} = \dfrac{T_1}{T_1 - T_2} = 18{,}1$. Следовательно, мощность теплового насоса (работа внешних сил в единицу времени), обеспечивающей такую температуру в помещении должна быть $P_{тепл.нас} = \dfrac{Q_1}{\xi_1} = 23{,}09\,Вт.$

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какой процесс называется круговым процессом?
2. Какой цикл называется прямым циклом?
3. Какая машина называется тепловой машиной? Начертите схему действия тепловой машины.

4. Чему равен коэффициент полезного действия (КПД) тепловой машины?
5. Начертите в координатах P,V прямой цикл Карно. Из каких процессов он состоит?
6. Чему равен КПД прямого цикла Карно?
7. Начертите схему идеальной тепловой машины, работающей по циклу Карно.
8. Начертите в координатах P,V обратный цикл Карно.
9. Начертите схему идеальной холодильной машины.
10. Какой цикл называется обратным циклом?
11. Какая машина называется холодильной машиной? Начертите схему действия холодильной машины.

## Лекция 19

# ВТОРОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ. НЕРАВЕНСТВО КЛАУЗИУСА

Термины и понятия

Вечный двигатель
Возрастание
Второго рода
Направление процесса
Необратимый процесс
Необратимый цикл
Неравенство Клаузиуса
Обратимый процесс
Обратимый цикл
Обратный цикл Карно
Прямой цикл Карно
Первого рода
Приведенная теплота
Произвольный
Самопроизвольный
Функция состояния
Энтропия

## 19.1. НЕКОТОРЫЕ ФОРМУЛИРОВКИ ВТОРОГО НАЧАЛА ТЕРМОДИНАМИКИ

Первое начало термодинамики определяет количественные соотношения между теплотой, работой и изменением внутренней энергии термодинамической системы, и выражает по существу закон сохранения энергии. Второе начало термодинамики позволяет судить о направлении процессов, которые могут происходить в действительности. Формулировка второго начала термодинамики – это постулат, который является обобщением опытных фактов.

Основоположником второго начала термодинамики является французский ученый С. Карно (1796 – 1832 гг.), исследовавший процессы превращения теплоты в работу. Второе начало термодинамики было сформулировано в 1850 – 1851 гг. немецким физиком Р. Клаузиусом и шотландским физиком В. Томсоном.

Формулировка Клаузиуса: *теплота не может самопроизвольно переходить от тела менее нагретого к телу более нагретому.* Чтобы процесс переноса теплоты от менее нагретого к более нагретому телу имел место, необходимо совершить работу. Пример: холодильная машина (домашний холодильник) охлаждает тела, находящиеся в нём отбирая у них теплоту и передавая её другим телам за счёт работы электромотора.

Формулировка Томсона: *невозможен круговой процесс, единственным результатом которого было бы совершение работы за счёт охлаждения теплого резервуара (уменьшения его внутренней энергии).* Невозможно полностью превратить в работу $A$ отобранное у теплого резервуара количество теплоты $Q_1$, так, чтобы система вернулась при этом в начальное состояние и при этом никаких изменений в окружающей среде не произошло. Для получения полезной работы за счет теплоты $Q_1$ обязательно потребуется передать теплому резервуару (холодильнику) некоторое количество теплоты $Q_2$. Из формулировки Томсона второго начала термодинамики следует невозможность создания тепловой машины с КПД, равным единице. Действительно, если КПД равен единице: $\eta = 1 - \dfrac{Q_2}{Q_1} = 1$, то $Q_2=0$, и тепловая машина осуществляет процесс, запрещенный вторым началом термодинамики в формулировке Томсона.

Тепловая машина, которая превращала бы полученную от резервуара теплоту в работу полностью, называют **вечным двигателем второго рода.** Напомним, что **вечный двигатель первого рода** – это устройство, которое производит работу без затраты энергии, то есть из ничего. Существование вечного двигателя первого рода противоречит первому началу термодинамики. Возможность создания вечного двигателя второго рода противоречит второму началу термодинамики.

## 19.2. НЕРАВЕНСТВО КЛАУЗИУСА

Пусть тепловая машина, связанная в своей работе только с двумя резервуарами – нагревателем при температуре $T_1$ и холодильником при температуре $T_2$, совершает цикл Карно. Тогда коэффициент полезного действия равен $\eta = \dfrac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$, с другой стороны коэффициент полезного действия машины, работающей по циклу Карно, определяется только температурой нагревателя и холодильника и равен $\eta = \dfrac{T_1 - T_2}{T_1}$. Тогда

$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$ или $\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}$. Запишем это выражение иначе $\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}$, где $\frac{Q_1}{T_1}$ – приведённая теплота нагревателя; $\frac{Q_2}{T_2}$ – приведённая теплота холодильника.

**Приведённой теплотой называется величина** $\frac{Q}{T}$, где $Q$ – теплота, полученная термодинамической системой от резервуара с температурой $T$.

Таким образом, для равновесного обратимого цикла (цикла Карно) **приведенная теплота нагревателя равна приведённой теплоте холодильника.**

Выражение $\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}$ можно записать иначе $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$, где $Q_1$ и $Q_2$ – теплота, полученная рабочим телом от нагревателя ($Q_1 > 0$) и теплота, полученная рабочим телом от холодильника ($Q_2 < 0$). Если машина совершает цикл Карно, то сумма приведенной теплоты нагревателя и приведенной теплоты холодильника равна нулю: $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$ (равенство Клаузиуса).

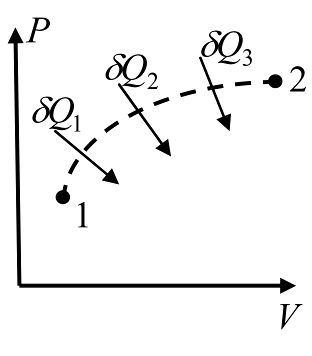
Пусть тепловая машина, связанная в своей работе только с двумя резервуарами – нагревателем при температуре $T_1$ и холодильником при температуре $T_2$, совершает произвольный цикл, который возможно является неравновесным и необратимым. Тогда, зная что коэффициент любой тепловой машины равен $\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$, а коэффициент машины, работающей по циклу Карно равен $\eta_к = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$ и коэффициент машины, работающей по циклу Карно всегда больше, чем коэффициент полезного действия любой машины $\eta_к > \eta$, имеем: $\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} < \frac{T_1 - T_2}{T_1}$ или $\frac{Q_1}{T_1} < \frac{Q_2}{T_2}$ – приведённая теплота холодильника больше приведенной теплоты нагревателя. Выражение $\frac{Q_1}{T_1} < \frac{Q_2}{T_2}$ можно записать иначе

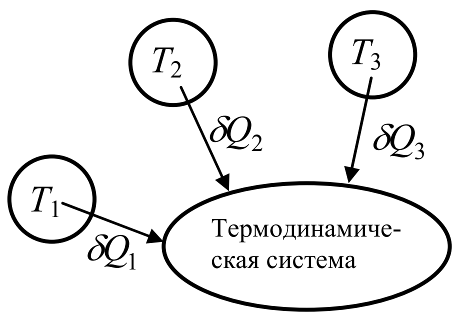
$\frac{Q_1}{T_1}+\frac{Q_2}{T_2}<0$ – **приведенная теплота произвольного замкнутого цикла меньше нуля.** Если машина совершает произвольный круговой цикл, то сумма приведенной теплоты нагревателя и приведенной теплоты холодильника меньше нуля: $\frac{Q_1}{T_1}+\frac{Q_2}{T_2}<0$ (неравенство Клаузиуса).

Если тепловая машина связана только с двумя тепловыми резервуарами – нагревателем и холодильником, и совершает произвольный цикл (обратимый или необратимый), то неравенство Клаузиуса можно записать: $\frac{Q_1}{T_1}+\frac{Q_2}{T_2}\le 0$, где $(\frac{Q_1}{T_1}+\frac{Q_2}{T_2})$ – сумма приведенной теплоты нагревателя и холодильника.

**Приведенная теплота произвольного кругового цикла меньше или равна нулю (в случае обратимого цикла имеет место знак равенства).**

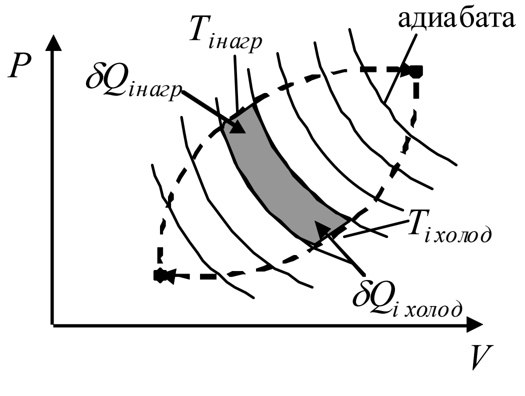
**Неравенство Клаузиуса в общем виде.** Пусть над произвольной термодинамической системой совершается процесс, когда система переходит из одного равновесного состояния 1 в другое равновесное состояние 2 по пути, который не обязательно является равновесным. Тогда на графике такой переход можно изобразить не сплошной, а пунктирной линией. При переходе из состояния 1 в состояние 2 система обменивается теплом с внешней средой, которую можно рассматривать как совокупность тепловых резервуаров, имеющих различные температуры. Тепловой процесс тогда можно рассматривать как последовательность передачи системе элементарных количеств теплоты $\delta Q_i$ от тепловых резервуаров с температурами $T_i$, где индекс $i$ – порядковый номер резервуара.



Элементарной приведённой теплотой называется величина $\dfrac{\delta Q_i}{T_i}$, где $\delta Q_i$ – элементарное количество теплоты, полученное термодинамической системой от теплового резервуара при температуре $T_i$. Приведенной теплотой перехода термодинамической системы из начального равновесного состояния 1 в произвольное конечное равновесное состояние 2, называется сумма величин $\dfrac{\delta Q_i}{T_i}$ (при стремлении числа тепловых резервуаров к бесконечности, сумма превращается в интеграл): $\lim\sum\limits_i \dfrac{\delta Q_i}{T_i} = \int\limits_1^2 \dfrac{\delta Q}{T}$.

Если система совершает произвольный круговой процесс, то разделим график рассматриваемого кругового процесса на элементарные участки системой адиабат. Адиабаты должны быть расположены настолько близко друг к другу, чтобы каждый выделяемый ими участок кругового процесса соответствовал взаимодействию системы только с одним тепловым резервуаром определенной температуры $T_i$. Для каждой пары тепловых резервуаров с одинаковым номером $i$ имеет место неравенство




$\dfrac{\delta Q_{i\,нагр}}{T_{i\,нагр}} + \dfrac{\delta Q_{i\,холод}}{T_{i\,холод}} \le 0$. Запишем аналогичные выражения для всех пар резервуаров с одинаковым номером $I$ и просуммируем эти неравенства, получим $\sum\limits_i \left(\dfrac{\delta Q_{i\,нагр}}{T_{i\,нагр}} + \dfrac{\delta Q_{i\,холод}}{T_{i\,холод}}\right) = \oint \dfrac{\delta Q}{T} \le 0$.

**Приведённая теплота произвольного неравновесного и необратимого кругового процесса меньше или равна нулю:** $\oint \dfrac{\delta Q}{T} \le 0$ – неравенство Клаузиуса в общем виде.

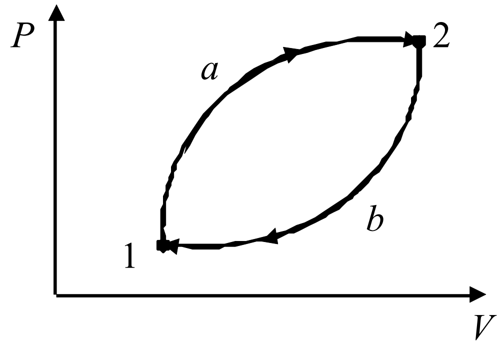
Если процесс равновесный и, следовательно, обратимый, то имеет место равенство (равенство Клаузиуса):

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0 .$$

## 19.3. ЭНТРОПИЯ

**Энтропия при обратимых процессах.** Рассмотрим произвольный обратимый круговой процесс 1–*a*–2–*b*–1, график которого представлен на рисунке. Как следует из равенства Клаузиуса, приведенная теплота этого процесса равна нулю: $\oint \frac{\delta Q}{T} = 0$ или $\oint\limits_{1-a-2-b-1} \frac{\delta Q}{T} = 0$.

Приведенную теплоту кругового процесса можно представить как сумму двух слагаемых – приведенной теплоты процесса 1–*a*–2 и процесса 2–*b*–1. Интеграл в равенстве $\oint\limits_{1-a-2-b-1} \frac{\delta Q}{T} = 0$ равен сумме интегралов




$\oint\limits_{1a2b1} \frac{\delta Q}{T} = \int\limits_{1-a-2} \frac{\delta Q}{T} + \int\limits_{2-b-1} \frac{\delta Q}{T} = 0$ или $\int\limits_{1-a-2} \frac{\delta Q}{T} = -\int\limits_{2-b-1} \frac{\delta Q}{T}$. Так как процесс обратимый, то $\int\limits_{1-a-2} \frac{\delta Q}{T} = -\int\limits_{2-a-1} \frac{\delta Q}{T}$, тогда $\int\limits_{1-a-2} \frac{\delta Q}{T} = \int\limits_{1-b-2} \frac{\delta Q}{T}$. Это равенство означает, что приведенная теплота процесса перехода системы из произвольного начального состояния 1 в произвольное конечное состояние 2 по пути 1–*a*–2 и по пути 1–*b*–2 одинакова. Таким образом, **приведенная теплота обратимого перехода системы из произвольного начального состояния в произвольное конечное состояние не зависит от пути перехода, а определяется только параметрами начального и конечного состояний.**

Проведем аналогию с механикой: работа консервативных сил не зависит от формы пути перехода механической системы из произвольного начального состояния в произвольное конечное состояние. С работой консервативных сил связано понятие потенциальной энергии. Потенциальная энергия – функция координат начального и конечного состояний механической системы. Изменение потенциальной энергии равно работе консервативных сил.

Приведенная теплота обратимого термодинамического процесса также имеет свойство – она не зависит от пути перехода системы из начального состояния в конечное. Поэтому можно сделать вывод, что существует такая термодинамическая функция состояния термодинамической системы, изменение которой при обратимом переходе системы из произвольного начального состояния в произвольное конечное состояние равно приведенной теплоте такого перехода. Эта функция состояния называется **энтропия.**

Итак, энтропия $S$ – *это функция состояния термодинамической системы, приращение которой равно приведенной теплоте обратимого перехода системы из произвольного начального состояния 1 в произвольное конечное состояние 2*: $S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}$ или в дифференциальной форме $dS = \frac{\delta Q}{T}$, где $\delta Q$ – элементарное количество теплоты, полученное термодинамической системой из внешней среды в обратимом процессе, $T$ – температура термодинамической системы.

**Энтропия идеального газа.** Найдем выражение для энтропии идеального газа как функции его параметров состояния. Воспользуемся выражением $dS = \frac{\delta Q}{T}$, подставив в него в соответствии с первым началом термодинамики величину $\delta Q = dU + PdV$:

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{dU + PdV}{T} = \frac{\frac{m}{\mu}\frac{i}{2}RdT + \frac{m}{\mu}\frac{RT}{V}dV}{T} = \frac{m}{\mu}C_V\frac{dT}{T} + \frac{m}{\mu}R\frac{dV}{V}.$$

В преобразованиях учтено, что $dU = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2}RdT = \frac{m}{\mu}C_V dT$ и $P = \frac{m}{\mu}\frac{RT}{V}$, полученное из уравнения состояния идеального газа.

Интегрируя обе части равенства, получим энтропию идеального газа:

$$S = \frac{m}{\mu}C_V \ln T + \frac{m}{\mu}R\ln V + const.$$

Изменение энтропии при переходе идеального газа из состояния, характеризуемого параметрами $T_{нач}$, $V_{нач}$ в состояние, характеризуемое параметрами $T_{кон}$, $V_{кон}$ можно определить по формуле: $S_2 - S_1 = \frac{m}{\mu} C_V \ln\frac{T_{кон}}{T_{нач}} + \frac{m}{\mu} R \ln\frac{V_{кон}}{V_{нач}}$.

**Энтропия при необратимых процессах.** Рассмотрим переход термодинамической системы из одного равновесного состояния 1 в другое равновесное состояние 2. Пусть система совершила переход 1–*a*–2. Этот переход является необратимым переходом. Процесс обратного перехода системы 2–*b*–1 равновесный и обратимый. Поскольку круговой процесс состоит из равновесного и неравновесного переходов, то в целом круговой процесс 1–*a*–2–*b*–1 является необратимым. Для него справедливо неравенство Клаузиуса: $\oint \frac{\delta Q}{T} \le 0$ или $\oint\limits_{1-a-2-b-1} \frac{\delta Q}{T} \le 0$.

Приведенную теплоту кругового процесса можно представить как сумму двух слагаемых – приведенной теплоты процесса 1–*a*–2 и процесса 2–*b*–1. Интеграл в неравенстве $\oint\limits_{1-a-2-b-1} \frac{\delta Q}{T} \le 0$ равен сумме интегралов $\oint\limits_{1a2b1} \frac{\delta Q}{T} = \int\limits_{1-a-2} \frac{\delta Q}{T} + \int\limits_{2-b-1} \frac{\delta Q}{T} \le 0$ или $\int\limits_{1-a-2} \frac{\delta Q}{T} \le -\int\limits_{2-b-1} \frac{\delta Q}{T}$. Так как процесс обратного перехода системы 2–*b*–1 равновесный и обратимый, то $\int\limits_{2-b-1} \frac{\delta Q}{T} = -\int\limits_{1-b-2} \frac{\delta Q}{T}$, тогда


$\int\limits_{1-a-2} \frac{\delta Q}{T} \le \int\limits_{1-b-2} \frac{\delta Q}{T}$. Но $\int\limits_{1-b-2} \frac{\delta Q}{T} = S_2 - S_1$ по определению энтропии, следовательно $S_2 - S_1 \ge \int\limits_{1-a-2} \frac{\delta Q}{T}$. Так как процесс 1–*a*–2 необратимый, то выражение можно записать $S_2 - S_1 \ge \int\limits_{необр} \frac{\delta Q}{T}$. Если состояние 2 бесконечно мало отличается от состояния 1, неравенство можно записать в дифференциальной форме следующим образом: $dS \ge \frac{dQ}{T}$.

Оба неравенства $S_2 - S_1 \geq \int\limits_{необр} \frac{\delta Q}{T}$ и $dS \geq \frac{dQ}{T}$ означают, что *приращение энтропии термодинамической системы в произвольном (обратимом или необратимом) процессе всегда больше или равно приведенной теплоте этого процесса.*

## 19.4. ЗАКОН ВОЗРАСТАНИЯ ЭНТРОПИИ

Пусть при необратимом процессе 1–*а*–2 система является адиабатически изолированной. Так как адиабатический процесс осуществляется без теплообмена с окружающей средой $\delta Q = 0$, то приведенная теплота процесса 1–*а*–2 равна нулю $\int\limits_{\substack{необр \\ 1-a-2}} \frac{\delta Q}{T} = 0$. С учетом этого условия неравенства $S_2 - S_1 \geq \int\limits_{необр} \frac{\delta Q}{T}$ и $dS \geq \frac{dQ}{T}$

можно записать: $S_2 - S_1 \geq 0$ и $dS \geq 0$.

Полученные неравенства выражают **закон возрастания энтропии:** *в любом процессе, который осуществляется в адиабатически изолированной системе, энтропия либо возрастает, либо остаётся постоянной.*

Для равновесных обратимых адиабатических процессов $S_2 - S_1 = 0$ и $dS = 0$, то есть энтропия остается постоянной ($S = const$).

Если все процессы в системе, в конце концов, завершились, и система перешла из одного равновесного состояния в другое равновесное состояние, её энтропия имеет максимальное значение.

Итак, в произвольном (обратимом или необратимом) процессе любой термодинамической системы приращение энтропии больше или равно приведенной теплоте процесса: $S_2 - S_1 \geq \int\limits_{необр} \frac{\delta Q}{T}$ ; $dS \geq \frac{dQ}{T}$. Знак равенства имеет место для равновесных (обратимых) процессов. В произвольном (обратимом или необратимом) процессе с адиабатически изолированной системой приращение энтропии больше или равно нулю (энтропия возрастает): $\Delta S = S_2 - S_1 \geq 0$; $dS \geq 0$, знак равенства имеет место для обратимых процессов.

Пример. Рассмотрим пример необратимого процесса, протекающего в адиабатически изолированной системе, и покажем, что при этом энтропия возрастает. Пусть теплоизолированный сосуд разделен на две части перегородкой. В одной части сосуда объёмом $V_1$ находится идеальный газ в количестве 1 *моль*. В другой части сосуда объёмом $V_2$ – вакуум. Перегородку убирают, и газ расширяется, занимая объём $V_1+V_2$. Найдем изменение энтропии газа $\Delta S$.

Проверим, возможен ли такой переход системы? Рассмотрим систему в целом. Процесс является адиабатическим, поэтому $Q = 0$. Объём термодинамической системы остается постоянным и газ при расширении в вакуум работы не совершает, следовательно $A = 0$. Из первого начала термодинамики следует, что внутренняя энергия идеального гага в этом процессе остаётся постоянной: $\Delta U = Q - A = 0$. Так как внутренняя энергия идеального газа зависит только от температуры, то можно сделать вывод, что температура газа в процессе его адиабатического расширения в вакуум остается постоянной: $T = const$.

Таким образом, существует один способ равновесного обратимого перевода системы из состояния с объёмом $V_1$ в состояние с объёмом $V_1 + V_2$ при $T = const$. Обратим внимание на то, что изменение энтропии не зависит от способа перехода системы их одного равновесного состояния в другое.

Итак, в рассматриваемом примере расширение газа из начального равновесного состояния в конечное равновесное состояние осуществляется в результате равновесного изотермического расширения газа. Воспользуемся выражением, полученным ранее. Изменение энтропии при переходе идеального газа из состояния, характеризуемого параметрами $T_{нач}$, $V_{нач}$ в состояние, характеризуемое параметрами $T_{кон}$, $V_{кон}$ можно определить по формуле: $S_2 - S_1 = \frac{m}{\mu} C_V \ln \frac{T_{кон}}{T_{нач}} + \frac{m}{\mu} R \ln \frac{V_{кон}}{V_{нач}}$.

Для нашего примера $T_{нач}=T_{кон}$; $V_{нач}=V_1$, $V_{кон}=V_1+V_2$, тогда $\Delta S = S_2 - S_1 = R \ln \frac{V_{кон}}{V_{нач}} = R \ln \frac{V_1 + V_2}{V_1}$. Как видно из полученного выражения $\Delta S = R \ln \frac{V_1 + V_2}{V_1} > 0$, значит энтропия возрастает при адиабатическом расширении газа в вакуум. Следовательно, рассматриваемый процесс является необратимым.

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какой процесс называется обратимым процессом? Необратимым?
2. Напишите неравенство Клаузиуса.

3. Возможен ли процесс, при котором теплота. взятая от нагревателя, полностью преобразуется в работу?
4. В каком направлении может изменяться энтропия замкнутой системы? незамкнутой системы?
5. Дайте понятие энтропии.
6. Изобразите в координатах $T,S$ изотермический и адиабатический процессы.
7. Представьте графически цикл Карно в координатах $T,S$.

## Лекция 20

# ЭНТРОПИЯ И ВЕРОЯТНОСТЬ. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ

Термины и понятия

Абсолютный нуль
Безграничный
Бесконечно малый
В принципе
Вероятность
Вселенная
Выяснить (выяснять)
Глубокий смысл
Достигать
Жирная (точка)
Запрещаемый (от глаг. запрещать)
Изобразить (изображать)
Квантовый характер
Касаться
Касающийся
Мысленно
На практике
Несостоятельный
Объединить
Ограничение
Огромный
Отклонение
Отступление
Перенумеровать
Полностью
Предоставленный (от глаг. предоставить)
Применим, -а,-о,-ы
Равновероятные события
Следует = нужно, рекомендуется
Теплоизолированная система
Термодинамическая вероятность
Убедительно
Эквивалентный
Энтропия

## 20.1. ЭНТРОПИЯ

Итак, мы ввели понятие энтропии. Энтропия – функция состояния системы. Если тело (или система тел) при переходе из одного состояния в другое на бесконечно малом участке этого перехода получает бесконечно малое количество теплоты $\delta Q$, то отношение $\frac{\delta Q}{T}$ является дифференциалом некоторой функции S. Эта функция – энтропия:

$$dS = \frac{\delta Q}{T}.$$

При обратимом процессе изменение энтропии:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T},$$

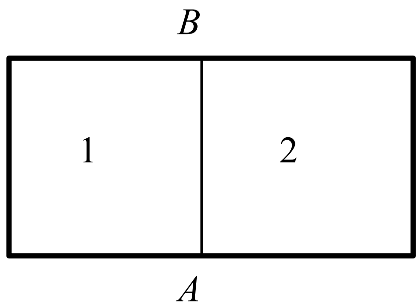
при этом изменение энтропии $\Delta S$ не зависит от пути перехода из состояния 1 в состояние 2.

Теплоизолированная (или замкнутая) система – это система, не получающая и не отдающая тепла. Теоретически доказано, что в замкнутой системе все необратимые процессы протекают в сторону возрастания энтропии, т.е. $\Delta S > 0$. В частном случае, когда все процессы системы обратимы, то изменение энтропии равно нулю, т.е. $\Delta S = 0$. Кратко выше сказанное можно записать так:

$$\Delta S \geq 0,$$

(знак равенства относится к обратимым процессам, знак неравенства – к необратимым). Выражение $\Delta S \geq 0$ тоже является одной из формулировок второго начала термодинамики, энтропия – критерий обратимости и необратимости процессов. По тому, как изменяется $\Delta S$, можно узнать: обратим процесс или нет. Энтропия, так же как и внутренняя энергия, является важнейшей функцией, определяющей термодинамический процесс, поскольку именно энтропия определяет направление протекания процесса.

Согласно второму началу термодинамики все процессы в замкнутой системе происходят в направлении возрастания энтропии. Если система в конечном состоянии находится в равновесном состоянии, то энтропия достигает максимума, и все процессы в системе прекращаются. Этот вывод противоречит основным положениям молекулярно-кинетической теории. Рассмотрим, например, закрытый сосуд, разделённый перегородкой $AB$ на две одинаковые части 1 и 2. Пусть сначала в части 1 сосуда находится $N$ молекул идеального газа, а в части 2 – вакуум. В момент $t = 0$ мгновенно уберем перегородку $AB$. Газ начинает расширяться. Молекулы из части 1 переходят в часть 2. Спустя некоторое время возникнет обратный поток частиц из части 2 в часть 1, после чего начнется и будет продолжаться обмен молекулами между частями 1 и 2.




Когда число молекул $N_1$ и $N_2$ в обеих частях сосуда, а также потоки туда и обратно станут одинаковыми, наступит состояние равновесия. Это состояние будет динамическое, а не статическое равновесие. В состоянии динамического равновесия $N_1 = N_2 = \dfrac{N}{2}$ почти никогда не выполняется, потому что молекулы движутся хаотично, а $N_1$ и $N_2$ мгновенные значения числа молекул в обеих частях сосуда. Однако среднее число частиц за достаточно большой промежуток времени в обоих частях сосуда будет одинаковым и тогда можно записать: $\overline{N}_1 = \overline{N}_2 = \frac{N}{2}$. Самопроизвольные отклонения числа частиц $N_1$ и $N_2$ от средних значений обусловленные тепловым движением молекул, называются флуктуациями.

В рассматриваемом примере возможна такая ситуация, когда все молекулы газа, первоначально распределенные равномерно по всему объёму сосуда, самопроизвольно соберутся в одной из частей сосуда – в части 1 или в части 2. С точки зрения молекулярно-кинетической теории такая ситуация возможна, но при большом числе частиц маловероятна.

Энтропия – это функция состояния термодинамической системы, приращение которой равно приведенной теплоте равновесного перехода системы из начального состояния в конечное. Такое определение основывается на началах термодинамики. Рассмотрим молекулярно-кинетический смысл энтропии.

Следствием второго начала термодинамики является закон возрастания энтропии в адиабатически изолированной системе. Все процессы в адиабатически изолированной системе происходят в направлении возрастания энтропии: $\Delta S = S_{кон} - S_{нач} \geq 0$, где $S_{кон}$ и $S_{нач}$ – энтропия в конечном и начальном состояниях. Если в термодинамической адиабатически изолированной системе все макропроцессы, которые могли сопровождаться только увеличением энтропии, завершены и система пришла в состояние равновесия, то энтропия такой системы имеет максимальное значение. Таким образом, *в состоянии равновесия энтропия адиабатически изолированной системы максимальна.*

Обратный переход такой системы из состояния с большей энтропией в состояние с меньшей энтропией *невозможен*, так как его осуществление противоречит второму началу термодинамики.

В молекулярно-кинетической теории для описания свойств термодинамических систем и процессов применяется понятие вероятности состояния. Тогда, используя понятие вероятности состояния, следствия второго начала термодинамики можно сформулировать так: *всякий процесс в адиабатически изолированной системе представляет собой переход из состояния с меньшей вероятностью в состояние с большей вероятностью. Вероятность равновесного состояния максимальна. А* *переход системы из состояния с большей вероятностью в состояние с меньшей вероятностью невозможен.*

Отсюда следует, что понятие энтропии и вероятности состояния должны быть тесно связаны между собой. Найдем эту взаимосвязь.

## 20.3. СТАТИСТИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ВТОРОГО НАЧАЛА ТЕРМОДИНАМИКИ. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ КЛАССИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

1. Молекулы системы представляют собой частицы, подчиняющиеся законам классической механики. Энергия и другие характеристики частиц изменяются непрерывно и могут принимать значения от 0 до сколь угодно больших значений.

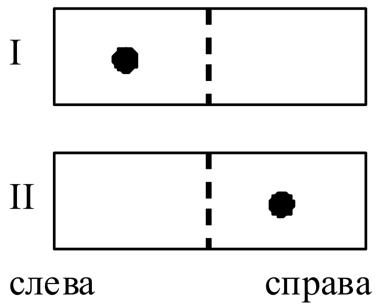
2. Принцип различимости тождественных частиц: молекулы обладают индивидуальностью, позволяющей их отличать друг от друга. Поэтому, перестановки местами двух молекул, находящихся в различных состояниях, приводят к переходу системы из одного микросостояния системы в другое.

3. Все микросостояния системы равновероятны.

**Микросостояние –** это состояние, в котором заданы параметры всех частиц системы. Параметры частиц, определяющие их микросостояния: пространственные координаты, скорость, энергия, импульс и т.д.

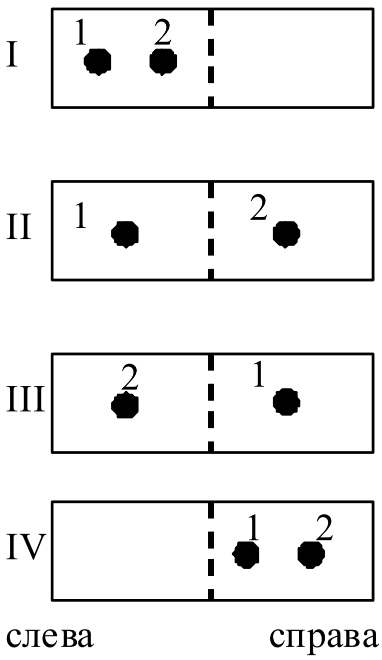
**Макросостоянием термодинамической системы** называется такое состояние системы, в котором заданы значения её макроскопических параметров: давления, объёма, температуры, внутренней энергии, энтропии и т.д.

Молекулы газа находятся в вечном хаотическом движении. Рассмотрим сосуд, в котором находится только <u>одна</u> молекула. Мысленно разделим сосуд на две части: левую и правую. Молекула с равной вероятностью может попасть или в левую часть, или в правую часть сосуда. Микросостояние системы характеризуется числом молекул, находящихся в той или иной части сосуда. <u>Вероятность</u> ω каждого <u>события</u> равна отношению числа случаев, при которых осуществляется данное событие, к полному числу возможных событий: число возможных случаев распределения молекул по сосуду равно 2, тогда вероятность того, что молекула нахо-



дится в левой части сосуда равна: $\omega_1 = \frac{1}{2}$. Вероятность того, что молекула находится в правой части сосуда $\omega_2 = \frac{1}{2}$. Оба события равновероятны.

Пусть в сосуде находятся <u>две</u> молекулы № 1 и № 2, участвующие в беспорядочном тепловом движении. При этом оказываются возможными **четыре** возможных случая распределения молекул в сосуде или $2^2$ (два – число отсеков, степень 2 – число молекул). Вероятность осуществления любого из этих четырех случаев равна:




$$\omega = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}.$$

Из таблицы видно, что вероятность равномерного распределения молекул по объёму наибольшая. Это означает, что данное состояние является не единственно возможным, а наиболее вероятным.

| № микросостояния | I | II | Число микросостояний | $W_T$ (термодинам. вероятность) | $\omega$ (математ. вероятность) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 2 | – | 1 | 1 | $\omega_1 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$ |
| 2 | 1<br>2 | 2<br>1 | 2 | 2 | $\omega_2 = \frac{1}{2} = \frac{2}{2^2}$<br>Равномерное распределение |
| 3 | – | 1 2 | 1 | 1 | $\omega_3 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$ |

Если в сосуде находятся <u>три</u> молекулы, то число равновероятных случаев распределения этих молекул будет равно восьми, и вероятность любого события из них равна:

$$\omega = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}.$$

Если в сосуде находятся <u>сто</u> молекул, то вероятность того, что все сто молекул соберутся в одной половине сосуда, в то время как другая половина сосуда останется совершенно пустой, равна:

$$\omega = \frac{1}{2^{100}}.$$

Эта вероятность настолько мала, что практически можно считать маловероятным наблюдение случая, когда все молекулы соберутся в одной половине сосуда, а вторая половина будет пустой.

В реальных условиях число молекул в одном кубическом сантиметре газа равно примерно $10^{20}$. Если взять сосуд емкостью 1 см$^3$ и мысленно разделить его на две части, то вероятность того, что все молекулы соберутся в одной половинке этого кубического сантиметра будет равна:

$$\omega = \frac{1}{2^{10^{20}}}.$$

Ясно, что это событие практически никогда не осуществляется.

Более вероятным является равномерное распределение молекул по всему объему сосуда. Это видно даже на самом простом примере (см. рис.). Состояния II и III, изображенные на рис, совершенно не различимы друг от друга , оба эти состояния можно рассматривать как одно состояние (назовем его «макросостояние»), соответствующее равномерному распределению молекул по объему, но это состояние может реализоваться двумя способами (двумя «микросостояниями») и его вероятность равна:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Даже в таком простейшем случае вероятность равномерного распределения молекул по объему сосуда является наибольшей.

Сделаем вывод. Число возможных случаев распределения $N$ молекул по **двум** отсекам можно рассчитать по формуле $2^N$, число возможных перестановок молекул по отсекам $p = \frac{N!}{N_1! \cdot N_2!}$, а математическая вероятность того или иного распределения молекул по двум отсекам равна $\omega = \frac{p}{2^N}$, где $N_1$ и $N_2$ – число молекул в каждом отсеке, в нашем случае $N_2 = N - N_1$.

Пример 1. Рассчитаем математическую вероятность того, что две молекулы распределены по двум отсекам равномерно $\omega_2 = \frac{N!}{N_1! \cdot N_2! \cdot 2^N} = \frac{2!}{1! \cdot 1! \cdot 2^2} = \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 1 \cdot 2^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ (сравните с таблицей).

Вероятность какого-либо состояния системы больше вероятности отдельного распределения молекул в $W$ раз: $\omega_2 = \omega_1 \cdot 2$ или $\omega = \omega_1 \cdot W$, где $W$ – термодинамическая вероятность состояния системы.

Термодинамическая вероятность (статистический вес) $W$ – это число микросостояний, которыми может быть реализовано (осуществлено) данное макросостояние. Из определения следует, что термодинамическая вероятность $W = \frac{\omega}{\omega_1}$, в рассмотренном ранее примере: $W_2 = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{1/2}{1/4} = 2$, значит число микросостояний, которыми может быть реализовано данное макросостояние равно 2.

Термодинамика всегда имеет дело с системами, состоящими из огромного числа молекул. Газ всегда стремится занять весь предоставленный ему объем, чтобы молекулы газа равномерно распределились по всему объему. Равномерное распределение молекул газа по всему объему реализуется не потому, что оно является единственно возможным, а потому, что термодинамическая вероятность такого распределения неизмеримо выше термодинамической вероятности любых других распределений.

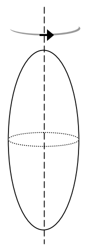
Необратимые процессы – особенность молекулярных явлений. Причина одна. Каждый необратимый процесс связан с возрастанием термодинамической вероятности. Еще Больцман отметил, что процессы в природе протекают так, что система переходит из состояния менее вероятного в более вероятное. Уже одно это заставляет предполагать, что между энтропией и термодинамической вероятностью состояния есть связь. Наличие такой связи было показано Больцманом. Согласно Больцману энтропия $S$ прямо пропорциональна логарифму термодинамической вероятности $W$:

$$S = k \ln W + const,$$

постоянная Больцмана $k$ является коэффициентом пропорциональности.

Формула Больцмана определяет энтропию $S$ с точностью до *const*, но это не играет роли, т.к. физический смысл имеет лишь изменение энтропии $\Delta S$ (как и в случае потенциальной энергии). Термодинамическая вероятность $W$ является мерой беспорядка в системе, значит, энтропия является мерой беспорядка, обусловленного хаотическим движением атомов и молекул. Следовательно, $S$ является *мерой неупорядоченности* системы.

В состоянии равновесия (это наиболее вероятное состояние системы) число микросостояний максимальное, следовательно, энтропия $S$ – $max$.



Энтропия упорядоченного движения беспорядком не обладает, оно может быть реализовано единственным способом и $W = 1$, $S = k \ln W = 0$.

Выражение $S = k \ln W + const$ тоже является формулировкой второго начала термодинамики. Второе начало термодинамики является статистическим законом. Статистический смысл второго начала термодинамики заключается в том, что второе начало применимо лишь к системам, состоящим из огромного числа молекул. Процессы, запрещаемые вторым началом термодинамики, являются не невозможными, а только очень-очень маловероятными.

Вечный двигатель второго рода принципиально допустим, но его создание маловероятно. Поэтому говорят, что существует *статистический запрет* на создание вечного двигателя второго рода.

Процессы, идущие с уменьшением энтропии (а не с возрастанием ее) возможны, только их вероятность также очень мала. При малом числе молекул будут часто наблюдаться отступления, отклонения от второго начала термодинамики. Второе начало термодинамики не применимо для систем с очень малым числом частиц.

Но второе начало термодинамики имеет ограничение и с другого конца. Второе начало термодинамики не применимо для систем с бесконечно большим числом частиц. Нельзя, например, применять второе начало термодинамики ко всей Вселенной, которая является бесконечной и безграничной. Таковы границы применимости второго начала термодинамики.

## 20.4. ПОНЯТИЕ О ТЕОРЕМЕ НЕРНСТА

Изменение энтропии $\Delta S$ при обратимых процессах определяется по формуле:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T}.$$

Термодинамика имеет дело только с разностями энтропии. Теорема Нернста, которую часто называют третьим началом термодинамики, утверждает, что при абсолютном нуле изменение энтропии превращается в нуль для всех тех состояний системы, между которыми в принципе возможен обратимый переход даже при самых низких температурах.

$$\lim_{T \to 0} \Delta S = 0,$$

это математическая запись третьего начала термодинамики. Отметим, что процесс, возможный в принципе, совсем не обязательно может быть осуществлен на практике. Вместо уравнения $\lim_{T \to 0} \Delta S = 0$ можно написать другое, которое математически эквивалентно данному уравнению, но которое более удобно для практического применения:

$$\lim_{T \to 0} S = 0,$$

при температуре абсолютного нуля энтропия любого вещества равна нулю.

Если рассматривать идеальный газ, то при температуре абсолютного нуля ($T = 0$) должно прекратиться хаотическое, т.е. тепловое, движение его молекул, так как кинетическая энергия молекулы идеального газа зависит только от его температуры. Но идеальный газ – это заведомо идеализированный объект. Не следует думать, что при абсолютном нуле температуры прекращается всякое движение. Например, при абсолютном нуле полностью сохраняется движение электронов в атомах. Это внутриатомное движение имеет чисто квантовый характер и рассматривается квантовой механикой.

Абсолютный нуль температуры означает (если, конечно, не иметь в виду только идеальный газ) не отсутствие движения молекул, а такое состояние тела, при котором дальнейшее уменьшение интенсивности движения молекул за счет отдачи энергии окружающим телам невозможно. Из третьего начала термодинамики Нернст вывел следствие, которое сформулировал как **невозможность достижения абсолютного нуля.** Доказательства этого положения, проведенные Нернстом, оказались несостоятельными. Это было убедительно показано Эйнштейном. Однако предположение Нернста о невозможности достижения абсолютного нуля посредством какого-либо конечного реального процесса оказалось справедливым. К абсолютному нулю можно лишь приближаться, достигая температур, все более и более близких к абсолютному нулю.

## 20.5. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ТЕРМОДИНАМИКИ

Согласно первому началу термодинамики:

$$\delta Q = dU + \delta A,$$

где

$$\delta A = PdV.$$

Энтропия $S$ – это физическая величина, дифференциал которой:

$$dS = \frac{\delta Q}{T}.$$

Отсюда

$$\delta Q = TdS.$$

Подставив $\delta Q = TdS$ в выражение первого начала термодинамики, получим:

$$TdS = dU + PdV.$$

Это основное уравнение термодинамики, объединяющее первое и второе начала термодинамики, записанное для обратимых процессов. При необратимых процессах энтропия системы возрастает $TdS > \delta Q$

$$TdS > dU + PdV.$$

Объединяя обе формы записи, получим основное уравнение термодинамики, записанное в виде:

$$TdS \geq dU + PdV,$$

где знак равенства относится к обратимым процессам, а знак неравенства – к необратимым.

В случае обратимых процессов выполняется термодинамическое тождество $TdS = dU + \delta A$, можно записать в виде:

$$\delta A = TdS - dU = d(TS) - SdT - dU \text{ или } \delta A = -dF - SdT,$$

где $F = U - TS$ – называется **свободной энергией.**

Физический смысл свободной энергии можно определить из выражения $\delta A = -dF - SdT$.

При $T = const$ $\delta A = -dF$ и $A_{1-2} = F_1 - F_2$.

Следовательно, **работа, совершаемая системой в обратимом изотермическом процессе равна убыли свободной энергии системы.**

Из выражения $F = U - TS$ видно, что свободная энергия составляет лишь часть внутренней энергии системы, так как $TS > 0$. Величина

$TS$ имеет размерность энергии и представляет собой ту часть внутренней энергии системы, которую нельзя в обратимом изотермическом процессе превратить в работу. Это как бы «обесцененная» часть внутренней энергии системы, которую часто называют **связанной энергией.** При одной и той же температуре связанная энергия тем больше, чем больше энтропия системы.

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Как Вы понимаете выражение: «Энтропия – это функция состояния»?
2. Какая система называется теплоизолированной (или замкнутой)?
3. Как изменяется энтропия при протекании необратимых процессов в замкнутой системе? При протекании обратимых процессов?
4. Напишите основное уравнение термодинамики.
5. Что такое термодинамическая вероятность?
6. Как связаны энтропия и термодинамическая вероятность?
7. Почему второе начало термодинамики является статистическим законом?
8. Чему равно изменение энтропии при абсолютном нуле?

# Лекция 21

# РЕАЛЬНЫЕ ГАЗЫ

Термины и понятия

Двухфазный
Изотермы Ван-Дер-Ваальса
Насыщенный пар
Пересыщенный пар
Поверхностное натяжение
Растянутая жидкость
Сжижение
Теоретическая изотерма
Универсальная газовая постоянная
Упругость насыщенных паров
Фаза
Экспериментальная изотерма

## 21.1. УРАВНЕНИЕ ВАН-ДЕР-ВААЛЬСА

Уравнение Ван-дер-Ваальса – это уравнение состояния реального газа. Оно не является единственным уравнением, характеризующим состояние газа. Таких уравнений предложено более семидесяти. Уравнение Ван-дер-Ваальса является наиболее удачным из всех этих уравнений. Оно, в общем, правильно передает зависимость давления от объема для реального газа. В него входят всего три константы, одна из которых является универсальной газовой постоянной $R$. В дальнейшем (для упрощения вычислений) будем рассматривать только один моль газа. Для одного моля идеального газа уравнение Менделеева–Клапейрона, т.е. уравнение состояния идеального газа, записывалось так:

$$PV_0 = RT, \tag{21.1}$$

где $P$ – давление газа, $V_0$ – объем одного моля газа, $T$ – абсолютная температура газа. В это уравнение надо внести поправки, учитывающие свойства реального газа.

Первая поправка – это учет собственного объема молекул газа. Хотя собственный объем одной молекулы может показаться ничтожно малой величиной, учитывая огромное число молекул, находящихся в данном объеме газа, нельзя пренебрегать собственным объемом всех молекул. Собственный объем молекул сказывается в том, что молекулы движутся в данном объеме менее свободно, чем, если бы они были точечными. Если рассматривается объем $V_0$ одного моля газа, то свободное пространство, в котором движутся молекулы, будет меньше чем $V_0$.

С учетом собственного объема молекулы уравнение (21.1) запишется так:

$$P(V_0 - b) = RT,$$

где $b$ – поправка на собственный объем молекул, рассчитанная на 1 моль газа. Теоретические расчеты показывают, что $b = 4V'N_A$, где $V'$ – собственный объем одной молекулы газа, $N_A$ – число Авогадро, т.е. число молекул в одном моле. Поправку «$b$» определены экспериментально.

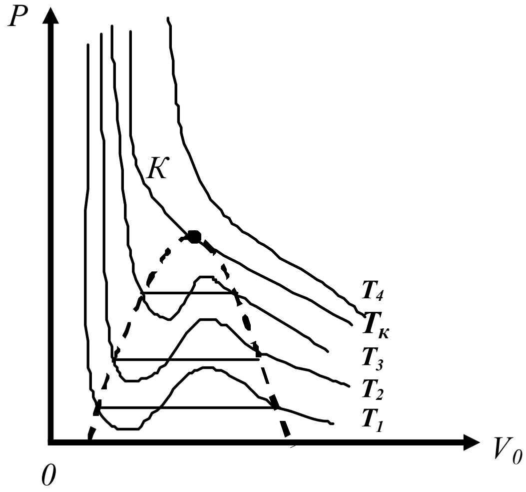
Вторая поправка – это учет сил взаимодействия между молекулами реального газа. Молекулы реального газа, находясь на некотором расстоянии друг от друга, взаимно притягиваются. Эти силы притяжения лишь при очень малых расстояниях между молекулами (в момент столкновения) сменяются силами отталкивания. В результате сил притяжения между молекулами газ как бы «сжимается» так, как если бы газ находился под бо′льшим давлением $P'$, чем то внешнее давление $P$, которое на него оказывают стенки сосуда. С учетом сил притяжения в выражении (31) давление $P$ надо заменить на $P' = P + P_i$. Величина $P_i$ называется внутренним давлением газа. Теоретические расчеты показывают, что $P_i = \frac{a}{V_0^2}$, где $V_0$ – объем одного моля газа, $a$ – константа, которая также определена экспериментально. С учетом обеих поправок, уравнение состояния реального газа запишется так:

$$\left(p + \frac{a}{V_0^2}\right)(V_0 - b) = RT. \qquad (21.2)$$

Это <u>уравнение Ван-дер-Ваальса для одного моля реального газа</u>. $R$ – универсальная газовая постоянная, «$a$» и «$b$» – константы, различные для разных газов, они определены экспериментально.

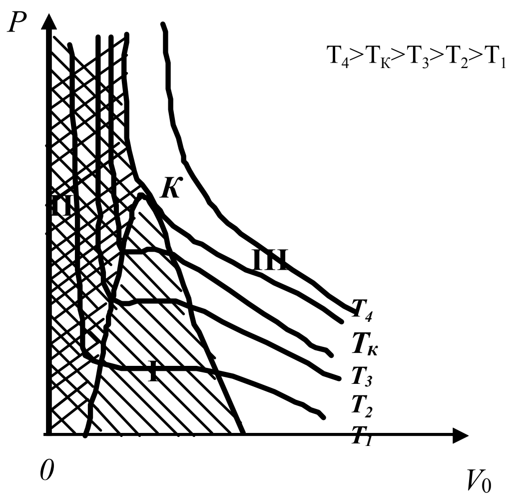
## 21.2. ИЗОТЕРМЫ РЕАЛЬНОГО ГАЗА. КРИТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ

Уравнение состояния реального газа – это уравнение Ван-дер-Ваальса. Построим график зависимости давления газа Ван-дер-Ваальса от его объёма при постоянной температуре, выразив давление $P$ через объём $V$ из уравнения $\left(p + \frac{a}{V_0^2}\right)(V_0 - b) = RT$: $P = \frac{RT}{V_0 - b} - \frac{a}{V_0^2}$. Кривые, построенные согласно этому уравнению, имеют вид, показанный на рисунке, и называются <u>изотермами Ван-дер-Ваальса</u>, так как каждая кривая соответствует определенной температуре *T*. При высоких температурах изотермы Ван-дер-Ваальса напоминают изотермы идеального газа; при более низких температурах изотермы Ван-дер-Ваальса имеют в определенной области давлений и объемов минимум и максимум.



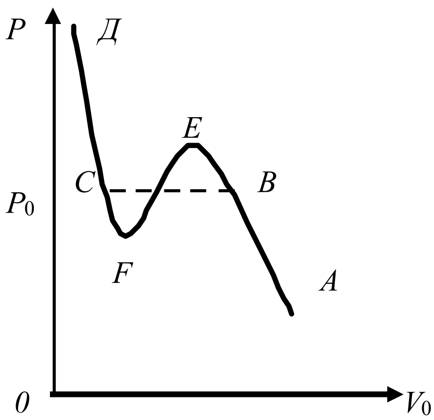

Уравнение Ван-дер-Ваальса было получено теоретически, и с точки зрения математики построение кривых согласно уравнению (21.2) сомнений не вызывает. Но для того, чтобы выяснить смысл этой, на первый взгляд странной зависимости, надо обратиться к опыту.

Если взять какой-нибудь реальный газ, поместить его под поршень в цилиндр и экспериментально найти зависимость $P = f(V_0)$ при различных температурах, то кривые будут иметь вид, показанный на рисунке. При высоких температурах изотермы реального газа, рассчитанные теоретически, совпадают с изотермами, найденными экспериментально. Кроме того, изотермы реального газа при высоких температурах очень близки к изотермам идеального газа, которые подчиняются закону Бойля-Мариотта. При более низких температурах в той области, где теоретические изотермы Ван-дер-Ваальса имеют минимум и максимум, экспериментальные изотермы имеют прямолинейные участки.

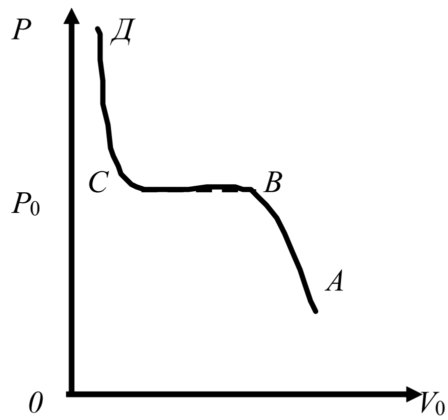



Чертим отдельно одну теоретическую изотерму и при той же самой температуре экспериментальную изотерму. Если эти рисунки наложить друг на друга, то они совместятся друг с другом за исключением участка *BC*.

Начнем сжимать газ, поддерживая его температуру постоянной, с какой-нибудь точки *А*. Ветвь изотермы *АВ* (на обоих рисунках) соответствует сжатию газа при низких давлениях. Свойства газа на участке *АВ* очень близки к свойствам идеального газа. При достижении некото-




**теоретическая изотерма**




**экспериментальная изотерма**

рого давления $P_0$ поведение газа резко меняется.

Газ продолжаем сжимать, его объем уменьшается, а давление остается одним и тем же (см. рис.), равным $P_0$. Участок *ВС* на экспериментальной изотерме соответствует процессу сжижения газа, т.е. на участке *ВС* газ превращается в жидкость (*ВС* – линия конденсации пара). В этой области вещество существует одновременно в двух фазах: жидкость – одна фаза, и вторая фаза – газ, который в данном случае является насыщенным паром по отношению к жидкости. Давление насыщенного пара зависит только от температуры, но не зависит от объема. Поэтому давление $P_0$ не меняется до тех пор, пока весь пар при данной температуре, не перейдет в жидкость. Давление $P_0$ называется упругостью насыщенных паров при данной температуре *Т*. В точке *В* все вещество еще было в газообразном состоянии, в точке С все вещество находится уже в жидком состоянии.

Ветвь изотермы *СД* (на обеих изотермах) характеризует процесс сжатия жидкости. Жидкости обладают малой сжимаемостью, поэтому кривая *СД* круто идет вверх.

Участок *ВЕ* теоретической изотермы Ван-дер-Ваальса можно получить на опыте. Участок *ВЕ* характеризует пересыщенный пар, т.е. пар, плотность которого больше плотности насыщенного пара при данной температуре. Состояние пересыщенного пара – малоустойчивое состояние. Пар легко конденсируется, частично переходит в жидкость, а оставшийся пар тогда будет уже насыщенным паром.

Участок *CF* теоретической изотермы Ван-дер-Ваальса также можно получить экспериментально. Он характеризует малоустойчивое состояние растянутой жидкости, т.е. жидкости с меньшей плотностью, чем ей положено иметь при данной температуре. Такая жидкость получается, если её особенно тщательно очистить от всяких примесей.

Участок *FE* теоретической изотермы Ван-дер-Ваальса экспериментально получить нельзя.

Каждая экспериментальная изотерма соответствует одной какой-либо температуре $T = const$. С повышением температуры $T$ прямолинейные участки соответствующих изотерм становятся все уже и при какой-то температуре $T_к$ точки $B$ и $C$, ограничивающие прямолинейный участок, сольются в одну точку $K$. Изотерма, на которой линия конденсации изображается в виде точки, является критической изотермой. Температура, соответствующая критической изотерме – критическая температура $T_к$. Изотерма, соответствующая критической температуре $T_к$, имеет только точку перегиба $K$. Касательная к точке $K$ параллельна оси абсцисс. Изотермы при температурах выше $T_к$ не имеют ни максимумов, ни минимумов, ни прямолинейных участков и близки к изотермам идеального газа.

Точка $K$ называется критической точкой. $T_к$, соответствующие ей $P_к$ и $V_к$ называются критическими температурой, давлением и объемом соответственно. **Критической температурой $T_к$ называется температура, при которой исчезает различие между жидким и газообразным состоянием вещества.** Для разных веществ критическая температура $T_к$ различна. Состояние вещества при критической температуре называется критическим состоянием вещества. В этом состоянии вещество приобретает особые свойства, например, исчезают силы сцепления между молекулами, вещество не имеет поверхностного натяжения и т.п.

При температурах ниже критической вещество может существовать в зависимости от давления либо в жидком, либо в газообразном состоянии, либо в двухфазном состоянии (жидкость и ее пар одновременно).

При температурах выше критической температуры вещество может существовать только в газообразном состоянии и никаким сжатием не может быть переведено в жидкое состояние. Газ сначала надо охладить до $T < T_к$, и только потом сжимать.

Критическому состоянию вещества соответствует единственная точка критической изотермы – точка, в которую превратилась линия конденсации. Эта точка называется критической. Параметры вещества в критической точке называют критическими параметрами. Для их определения необходимо установить положение критической точки на координатной плоскости $P$, $V$.

Любая изотерма Ван-дер-Ваальса, в том числе и критическая, описывается уравнением $P = \frac{RT}{V_0 - b} - \frac{a}{V_0^2}$. Так как критическая точка является точкой перегиба изотермы Ван-дер-Ваальса, в ней равны нулю первая и вторая производные по объёму функции $P(V)$ при $T=const$:

$$\frac{dP}{dV} = -\frac{RT}{(V-b)^2} + \frac{2a}{V^3} = 0;$$

$$\frac{d^2P}{dV^2} = \frac{2RT}{(V-b)^3} - \frac{6a}{V^4} = 0.$$

Решая уравнения совместно, найдем значения критических параметров: $T_к = \frac{8a}{27bR}$, $P_к = \frac{a}{27b^2}$, $V_к = 3b$,

где $a$, $b$ – константы из уравнения Ван-дер-Ваальса, описывающего состояние данного реального газа, $R$ – универсальная газовая постоянная. На графике функции $P = f(V_0)$ область I (заштрихована) – это область двухфазного состояния вещества, область II (двойная штриховка) – это область жидкого состояния, область III (не заштриховано) – это область газообразного состояния.

## 21.3. ВНУТРЕННЯЯ ЭНЕРГИЯ РЕАЛЬНОГО ГАЗА

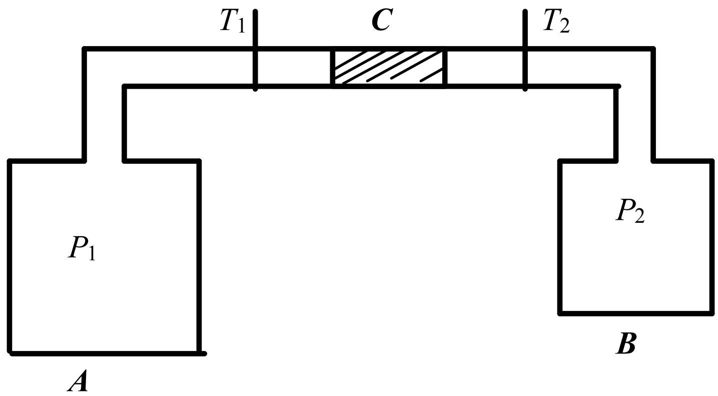
Известно, что внутренняя энергия идеального газа зависит только от температуры газа. Она определяет среднюю кинетическую энергию теплового движения молекул и для 1 *моля* равна $U_{и.г} = C_V T$.

Для реального газа внутренняя энергия $U = U_k + U_n$, где $U_k$ – сумма кинетических энергий всех его частиц, равная средней кинетической энергии молекул идеального газа при той же температуре $U_к = U_{и.г} = C_V T$ $U_n$ – потенциальная энергия взаимодействия частиц газа, она зависит от конфигурации (взаимного расположения) частиц газа. Так как взаимодействие молекул реального газа обуславливает появление внутреннего давления $P_i = \frac{a}{V_0^2}$, где $V_0$ – объем одного моля газа, $a$ –

константа Ван-дер-Ваальса. Тогда $dU_n = dA = P_i dV$. Или $U_n = -\frac{a}{V} + const$.

Тогда $U = U_к + U_n = C_V T - \frac{a}{V} + const.$ Таким образом, с точностью до постоянной внутренняя энергия реального газа определяется формулой $U = C_V T - \frac{a}{V}$. Внутренняя энергия зависит не только от температуры газа, но и от объёма, занимаемого газом. Кроме того внутренняя энергия различных газов, находящихся в одинаковых условиях различна, так как газы имеют различные постоянные $a$.

### 21.3. ЭФФЕКТ ДЖОУЛЯ-ТОМСОНА




Этот эффект наблюдается только для реальных газов. Если бы газ был идеальным, то этого эффекта не было бы. Имеем два сосуда $A$ и $B$, соединенные трубкой, в которой находится пробка $C$ из какого-нибудь пористого вещества, например ваты. Вокруг сосудов и трубки осуществляется хорошая теплоизоляция. В начальный момент времени в сосуде $A$ давление газа было $P_1$, а в сосуде $B$ – $P_2$, причем $P_1 > P_2$. По обеим сторонам пробки $C$ помещались термометры $T_1$ и $T_2$, измерявшие температуру. Газ из сосуда $A$ расширяется в сосуд $B$, где давление меньше. Процесс идет адиабатически (хорошая теплоизоляция), т.е. $\Delta Q = 0$. Работа против внешних сил со стороны газа тоже не совершается, давление $P_2$ мало и пробка $C$ остается на месте, то $\Delta A = 0$. Согласно первому началу термодинамики $\Delta Q = \Delta U + \Delta A$. Но если $\Delta Q = 0$ и $\Delta A = 0$, то $\Delta U = 0$ тоже. $\Delta U$ – изменение энергии реального газа. Если $\Delta U = 0$, то внутренняя энергия реального газа $U = const$.

Если газ в начальном состоянии имел температуру $T_1$ и занимал объём $V_1$, а после расширения газа его температура $T_2$, а объём равен

$V_1$+$V_2$, то можно записать: $C_V T_1 - \frac{a}{V_1} = C_V T_2 - \frac{a}{V_1 + V_2}$. Тогда $C_V (T_1 - T_2) = \frac{a}{V_1} - \frac{a}{V_1 + V_2}$ или $(T_1 - T_2) = \frac{a}{C_V}(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_1 + V_2})$. Эффект, заключающийся в изменении температуры газа при расширении без теплообмена и без совершения работы, называется эффектом Джоуля-Томсона.

Если газ при расширении охлаждается, то эффект Джоуля-Томсона называется положительным. Если газ при расширении нагревается, то эффект Джоуля-Томсона называется отрицательным. Названия, конечно, условны. Знак эффекта Джоуля-Томсона зависит знака поправки «*a*» в уравнении Ван-дер-Ваальса, описывающем рассматриваемый газ.

Техника получения газов в жидком состоянии неразрывно связана с техникой получения низких температур. Одним из способов получения низких температур является использование положительного эффекта Джоуля-Томсона. По этому способу, например, работает машина Линде, служащая для получения жидкого воздуха.

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Запишите уравнение Ван-дер-Ваальса для одного моля реального газа. Какие свойства реального газа отражают поправки «*a*» и «*b*» в этом уравнении.
2. Начертите одну теоретическую изотерму Ван-дер-Ваальса и при той же температуре экспериментальную изотерму.
3. Какая ветвь экспериментальной изотермы соответствует сжатию газа при низких давлениях? Сжатию жидкости? Процессу сжижения газа?
4. Какая температура называется критической?
5. В каком состоянии может существовать вещество при температурах выше критической? Ниже критической?
6. В чем заключается эффект Джоуля-Томсона?

## Лекция 22

# ФАЗОВЫЕ ПРЕВРАЩЕНИЯ

Термины и понятия

Двухфазная система
Трехфазная система
Диаграмма состояния
Испарение
Конденсация
Кривая испарения
Кривая плавления
Кривая равновесия (жидкости и ее насыщенного пара)
Кривая фазового перехода
Кристаллизация (затвердевание)
Парамагнитное состояние
Парообразование
Плавление
Сверхпроводящее состояние
Состояние динамического равновесия
Сублимация (возгонка)
Температура фазового перехода
Тройная точка
Удельный объем
Фазовые переходы второго ряда
Фазовые переходы первого ряда
Ферромагнитное состояние
Цикл Карно
Явление сверхтекучести

### 22.1. ПОНЯТИЕ О ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДАХ. ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ ПЕРВОГО РОДА

**Термодинамической фазой** называется физически однородная часть вещества, которая по своим физическим свойствам отличается от других его частей и отделена от них поверхностью раздела.

Пусть в закрытом сосуде имеется вода, над которой находится смесь воздуха с водяными парами. Эта система является двухфазной, она состоит из двух фаз: жидкой (вода) и газообразной (смесь воздуха с водяными парами). Если бы воздуха не было, то система все равно была бы двухфазной: жидкая фаза – вода и газообразная фаза – водяные пары.

Бросим в воду кусочки льда. Система станет трехфазной: твердая фаза – лед, жидкая фаза – вода, газообразная фаза – смесь воздуха с водяными парами.

Добавим к воде ртуть, в системе будут уже две жидкие фазы: ртуть и вода. Газообразная фаза по-прежнему одна, она состоит из смеси воздуха, паров воды и паров ртути. Итак, в системе может быть несколько жидких или твердых фаз. Но система не может содержать более одной газообразной фазы, так как все газы смешиваются между собой.

Соприкасающиеся фазы могут превращаться (переходить) друг в друга. Переход вещества из одного фазового состояние в другое называется фазовым переходом или фазовым превращением. Существуют следующие фазовые переходы:

1) жидкость $\leftrightarrow$ пар;
2) жидкость $\leftrightarrow$ твердое тело;
3) твердое тело $\leftrightarrow$пар.

Переход жидкости в пар может происходить в виде испарения при малых температурах и парообразования в процессе кипения. Обратный переход пара в жидкость называется конденсацией. Переход жидкости в твердое тело носит название кристаллизации (или затвердевания), обратный переход – это плавление. Переход твердого тела в пар – это сублимация (или возгонка), для обратного перехода специального термина нет, но иногда говорят конденсация. Все только что рассмотренные фазовые переходы являются фазовыми переходами первого рода. **Фазовые превращения первого рода –** это такие превращения, которые сопровождаются поглощением или выделением теплоты. Перечислим их характерные особенности.

1) Скачкообразность. Например, нагреваем лед, при достижении температуры, равной $0^0$ С, лед внезапно начинает превращаться в воду, обладающую совершенно другими свойствами, чем лед.
2) Переход из одной фазы в другую при заданном давлении происходит при определенной температуре. Так при атмосферном давлении лед начинает плавиться при $0^0$ С, и эта температура остается неизменной вплоть до момента, когда весь лед превратится в воду. До этого момента лед и вода существуют одновременно, соприкасаясь друг с другом. Конечно, при изменении давления меняется и температура фазового перехода.
3) Переход вещества из одной фазы в другую всегда связан с поглощением или выделением некоторого количества тепла, называемого скрытой теплотой или теплотой фазового перехода. Например, подводя тепло к жидкости, доводим ее до температуры кипения. Дальше тепло продолжаем подводить, но температура жидкости не повышается. Подводимое тепло идет на то, чтобы жидкость превратить в пар. В этом переходе скрытой теплотой является теплота парообразования, в данном случае она поглощается.

Удельной теплотой фазового превращения называется величина, равная отношению количества теплоты, которое нужно сообщить единице массы вещества, чтобы при постоянном давлении перевести его из одного фазового состояния в другое.

4) <u>При фазовых переходах происходит изменение удельного объема фаз. Удельный объем</u> – это объем, приходящий на единицу массы вещества:

$$V_{уд} = \frac{V}{m}.$$

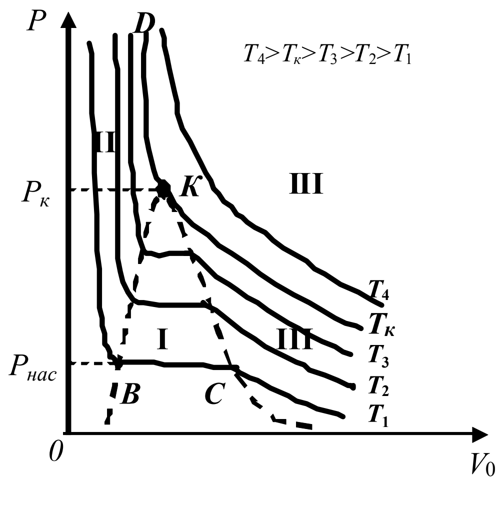
Вычислим изменение энтропии фазового превращения первого рода. Пусть вещество массой $m$ переводится из одного фазового состояния в другое при постоянной температуре и постоянном давлении. Удельная теплота фазового превращения равна $q$. Изменение энтропии тогда можно найти: $\Delta S = \int \frac{\delta Q}{T} = \frac{1}{T}\int \delta Q = \frac{Q}{T} = \frac{qm}{T}$.

## 22.2. РАВНОВЕСИЕ ФАЗ. КРИВАЯ РАВНОВЕСИЯ. ТРОЙНАЯ ТОЧКА

Важнейшим вопросом в учении о фазовых переходах является выяснение условий, при которых система, состоящая из двух или нескольких фаз, находится в равновесии. Для равновесия необходимо:

1) чтобы все фазы системы имели одну и ту же температуру $T_1 = T_2 = T$,
2) чтобы давление по разные стороны границы раздела соприкасающихся фаз было одинаково $P_1 = P_2 = P$,
3) чтобы массы всех фаз системы оставались неизменными, т.е. чтобы масса одной из фаз не росла за счет другой $m_1 = const$, $m_2 = const$; $m_1 + m_2 = m = const$ .

Рассмотрим процесс сжатия реального газа (пара). На рисунке процесс сжатия в координатах $P–V$ , например, при температуре $T_1$, представлен изотермой реального газа. При сжатии до точки $C$ давление газа повышается и газ представляет собой газообразную однородную фазу. Точка $C$ – состояние насыщенного пара. Насыщенным паром называется пар, находящийся в динамическом равновесии со своей жидкостью. При дальнейшем сжатии газа часть его превращается в жидкость. Участок изотермы $BC$ – это участок, характе-



ризующий состояние двухфазной системы – жидкость-пар. В сосуде одновременно существуют две фазы, находящиеся в равновесии и разделенные границей, являющейся поверхностью жидкости. Состояние динамического равновесия наступает, если число молекул, вылетающих из жидкости в результате теплового движения, равно числу молекул, возвращающихся обратно в жидкость. В точке *B* весь сосуд полностью заполнен жидкостью (жидкой фазой). При дальнейшем уменьшении объёма производится сжатие жидкости.

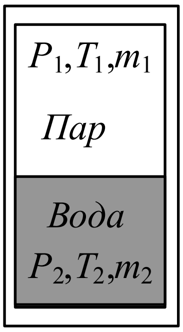
При повышении температуры участок изотермы, соответствующий двухфазному состоянию системы, участок *BC*, уменьшается. При критической температуре $T_к$ этот участок изотермы превращается в точку. В этой точке исчезает разница между жидкостью и газом. Жидкость и газ имеют одинаковые физические свойства. При температуре выше критической $T_к$ газ не может быть превращен в жидкость ни при каком давлении. Состояние системы в точке *K* называется критическим. При давлении больше $P_к$ изотерма $T_к$ разделяет жидкое и газообразное состояние реального газа. При пересечении этой изотермы (кривая *KD*) происходит непрерывный переход из газообразного состояния в жидкое. Кривая *BK* – это кривая, отделяющая жидкую фазу от двухфазного состояния. А кривая *KC* – это кривая, отделяющая газообразную фазу от двухфазного состояния. Значит область II на рисунке – это область жидкой фазы. Область I – это область состояния системы в двух фазах (жидкость – пар), находящихся в состоянии равновесия. Область III – это состояние существования одной фазы – газообразной. Причем, если температура газа при этом ниже критической $T_к$ – это пар – газообразное состояние, имеющее большую плотность. При высоких температурах (больше $T_к$) плотность газа заметно меньше и пар имеет свойства газа.

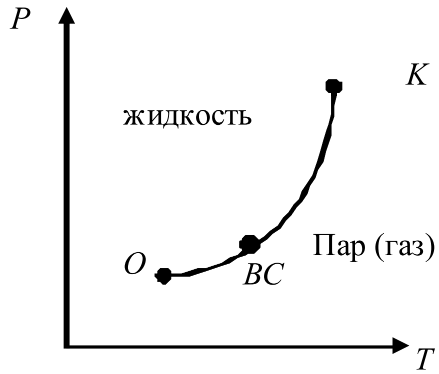
При фиксированной температуре ($T = const$) давление в термодинамической системе может принимать любое значение в пределах от нуля до бесконечности. Однако существует единственное значение давления $P = P_{нас}$, при котором система является двухфазной. Это давление равно давлению насыщенных паров $P_{нас}$ жидкости и соответствует линии конденсации *BC* на изотерме реального газа. При изменении температуры системы положение линии конденсации и соответственно равновесное давление двухфазной системы изменяется. Закон изменения давления с температурой в равновесной двухфазной системе устанавливает уравнение Клапейрона-Клаузиуса.

Построим график изменения равновесного давления двухфазной системы с температурой – график кривой фазового равновесия или кривая кипения и конденсации в координатах *P–T*.

Рассмотрим в качестве примера фазовый переход: жидкость $\leftrightarrow$ пар. Имеем закрытый сосуд, в котором при некоторой температуре $T$ находится двухфазная система: жидкость (одна фаза) и ее насыщенный пар (другая фаза). Насыщенным паром называется пар, находящийся в динамическом равновесии со своей жидкостью. Состояние динамического равновесия наступает, если число молекул, вылетающих из жидкости в результате теплового движения, равно числу молекул, возвращающихся обратно в жидкость. Давление насыщенного пара зависит только от температуры.

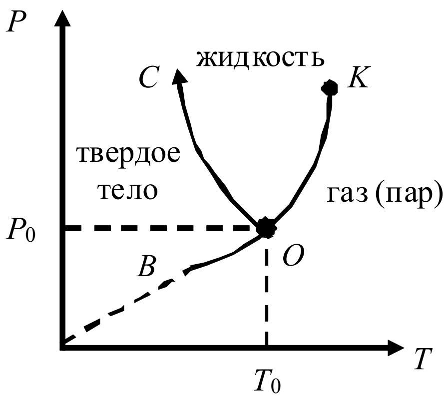
На рисунке кривая $OK$ – это кривая равновесия жидкости и ее насыщенного пара или кривая испарения (кривая конденсации). Любая точка этой кривой дает значения давления и температуры, при которых жидкость и пар находятся в динамическом равновесии друг с другом.




Точка $K$ соответствует критической температуре $T_к$, при $T_к$ пар становится неотличимым от жидкости (плотность пара равна плотности жидкости), поэтому кривая равновесия заканчивается в точке $K$.

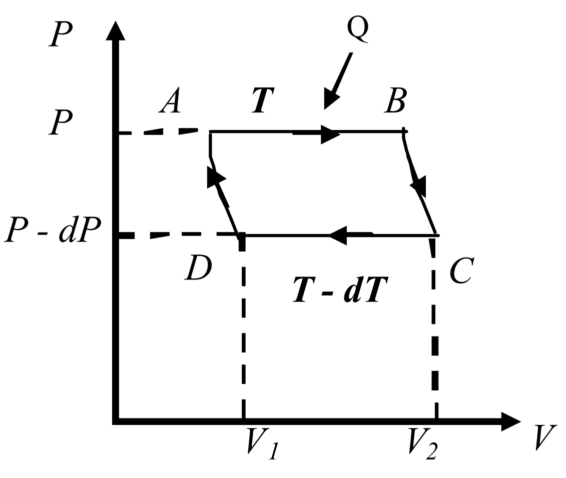
В точке $O$ жидкость охлаждается настолько, что начинается ее затвердевание. Точки лежащие левее кривой $OK$, изображают жидкое состояние вещества, а точки, лежащие правее кривой $OK$, – газообразное состояние вещества. Точки же самой кривой $OK$ отвечают состояниям, в которых существуют одновременно обе фазы вещества, находящиеся в состоянии динамического равновесия. При дальнейшем отнятии теплоты, затвердевание жидкости, начавшееся в точке $O$, будет продолжаться до тех пор, пока вся масса жидкости не перейдет в твердое состояние, причем давление $P_0$ и температура $T_0$ будут оставаться неизменными все это время.



Когда вся жидкость перейдет в твердое состояние, то над твердым телом будет по-прежнему насыщенный пар. Если дальше отнимать тепло у этой системы, давление насыщенного пара будет падать. Кривая *OB* – это кривая равновесия фазового перехода: твердое тело $\leftrightarrow$ пар (газ). Кривая равновесия *OB* твердого тела с газом (паром) уходит в начало координат, так как при абсолютном нуле ($T = 0^0 K$) температуры, согласно представлениям классической физики, вещество при любом давлении находится в твердом состоянии. Исключение составляет только гелий, остающийся после своего сжижения жидким при всех температурах вплоть до абсолютного нуля. Необъяснимое с точки зрения классических представлений поведение гелия связано с квантовыми явлениями.

В точке *O* сомкнулись уже две кривые равновесия для двух фазовых переходов: кривая равновесия *OK* для фазового перехода жидкость $\leftrightarrow$ пар (газ) и кривая *OB* для фазового перехода: твердое тело $\leftrightarrow$ пар (газ). Кривая равновесия для последнего фазового перехода: жидкость $\leftrightarrow$ твердое тело, тоже пройдет через точку *O*. Это кривая плавления *OC*, она может продолжаться неограниченно. В точке *O* сомкнулись уже три кривые равновесия для трех фазовых переходов. Точка *O* – тройная точка, в ней все три фазы: жидкая, твердая и газообразная находятся в равновесии. $P_0$ и $T_0$ различны для различных веществ, например, для воды $P_0 = 4{,}62$ мм рт.ст. и $t = +\ 0{,}01^0$ С. Плоскость *T–P* с указанными тремя кривыми равновесия называется диаграммой состояния. Диаграмма состояния позволяет судить о фазовых превращениях при том или ином процессе.

## 22.3. УРАВНЕНИЕ КЛАПЕЙРОНА-КЛАУЗИУСА




Пусть под поршнем в цилиндре находится двухфазная система, а именно жидкость и над ней ее насыщенный пар. Проведем с этой системой цикл Карно. Цикл Карно состоит из двух изотерм и двух адиабат. Пусть исходное состояние системы на графике *PV* изображается точкой *A*. Изотермически расширяясь, система переходит из состояния $A$ в состояние $B$. При изотермическом расширении двухфазной системы (жидкость – пар) происходит испарение жидкости. Поэтому $AB$ – прямая линия, так как давление насыщенного пара $P$ зависит только от температуры, а температура при переходе от $A$ к $B$ не меняется. Затем проведем бесконечно малое расширение по адиабате $BC$, при котором температура системы понизится на бесконечно малую величину $dT$, а давление на бесконечно малую величину $dP$. Далее следует изотермическое сжатие $CD$ при температуре $(T - dT)$ и постоянном давлении $(P - dP)$, потом бесконечно малое сжатие по адиабате $DA$.

Площадь петли цикла выражает бесконечно малую работу $dA$, совершенную во время цикла. Так как цикл бесконечно узкий, то петлю цикла можно считать прямоугольником и

$$dA = \left(V_2 - V_1\right) dP . \tag{22.1}$$

С другой стороны КПД цикла

$$\eta = \frac{dA}{Q},$$

где $Q$ – количество теплоты, подводимое к системе на участке $AB$. Для цикла Карно

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

в данном случае $T_1 = T$, а $T_2 = T - dT$, т.е.

$$\eta = \frac{T - (T - dT)}{T} = \frac{dT}{T}.$$

Тогда

$$dA = \eta Q = \frac{dT}{T} Q . \qquad (22.2).$$

Приравнивая (22.1) и (22.2), получим:

$$\left(V_2 - V_1\right) dP = Q \frac{dT}{T}$$

или

$$\frac{dP}{dT} = \frac{Q}{T\left(V_2 - V_1\right)}. \tag{22.3}$$

Уравнение (22.3) – это уравнение Клайперона–Клаузиуса, оно определяет наклон кривой фазового равновесия. В формуле (22.3) $Q$ – количество тепла, которое подведено на участке АВ. Это тепло пошло на испарение жидкости. Значит $Q = mq$, где $m$ – масса испарившейся части жидкости на участке $A \to B$, а $q$ – удельная теплота испарения (удельная теплота фазового перехода). Уравнение можно записать в общем виде:

$$\frac{dP}{dT} = \frac{Q}{T(V_2 - V_1)} = \frac{mq}{T(V_2 - V_1)} = \frac{q}{T(V_{2уд} - V_{1уд})}.$$

Уравнение Клапейрона – Клаузиуса $\frac{dP}{dT} = \frac{q}{T(V_{2уд} - V_{1уд})}$, как ясно из вывода, справедливо не только для испарения, но и для других фазовых превращений, сопровождающихся поглощением или выделением тепла, например для плавления, сублимации (возгонки) и т.п.

Итак, уравнение Клапейрона–Клаузиуса связывает между собой давление $P$ и температуру $T$ находящихся в состоянии равновесия двух фаз вещества – жидкости и пара, твердой фазы и жидкости, твердой фазы и пара и т.д. Это уравнение справедливо для фазовых переходов первого рода, которые сопровождаются поглощением или выделением теплоты. Величина $q$ – это удельная теплота фазового перехода (испарение, плавление, сублимация, и т.д.), $V_{1уд}$ и $V_{2уд}$ – удельные объёмы вещества в первой и во второй фазах.

На координатной плоскости $T$–$P$ уравнение Клапейрона–Клаузиуса задает линию, называемую **кривой фазового равновесия** (кривая испарения, кривая плавления, кривая сублимации и т.д.). Координатная плоскость *$T$–$P$ с нанесенными на нее кривыми фазового равновесия называется диаграммой состояния.* Кривые фазового равновесия делят координатную плоскость на области, которым соответствуют различные фазовые состояния вещества, например, твердое, жидкое и газообразное.

## 22.4. ПОНЯТИЕ О ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДАХ ВТОРОГО РОДА

<u>Фазовые переходы второго рода</u> – это фазовые превращения, происходящие без поглощения или выделения скрытой теплоты перехода и без изменения удельного объема.

К фазовым переходам второго рода относятся:

1) <u>явление сверхтекучести</u>, а именно переход гелия I в гелий II;
2) переход металлов в <u>сверхпроводящее состояние</u>;
3) переход вещества при определенной температуре из <u>ферромагнитного состояния в парамагнитное</u>.

Фазовые превращения (переходы) второго рода происходят сразу во всем объеме, поэтому нельзя говорить о равновесии двух разных фаз. Фазовые переходы второго рода всегда связаны с появлением у тела (системы) какого-либо нового качественного свойства. Например, когда жидкий гелий I переходит в жидкий гелий II, то жидкость остается жидкостью, но она приобретает принципиально новые свойства. Гелий II течет как жидкость, вообще не имеющая вязкости, это явление получило название сверхтекучести. Фазовые переходы второго рода – очень сложные и интересные явления. Для понимания таких явлений недостаточно представлений классической физики. Понять их можно только на основе квантовых представлений.

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что Вы понимаете под фазой?
2. Какие Вы знаете фазовые переходы первого рода?
3. Какие Вы знаете характерные особенности фазовых переходов первого рода?
4. Перечислите условия, необходимые для равновесия фаз двухфазной системы.
5. Какая точка называется тройной точкой?
6. Напишите уравнение Клапейрона–Клаузиуса.
7. Какие фазовые переходы называются фазовыми переходами второго рода?
8. Приведите примеры фазовых переходов второго рода.

## Лекция 23

# ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА В ГАЗАХ И ЖИДКОСТЯХ

Термины и понятия

Внутреннее трение
Диффузия
Коэффициент вязкости
Коэффициент диффузии
Оболочка
Теплопроводность
Явление переноса

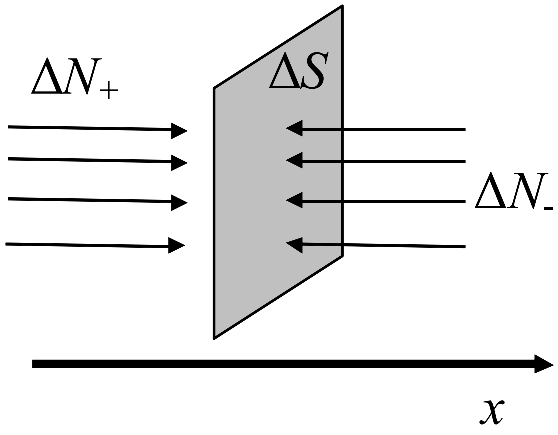
## 23.1. ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА В ГАЗАХ

В кинетической теории газов в основном рассматривается равновесное термодинамическое состояние. Такое состояние термодинамической системы представляет собой непрерывную последовательность равновесных состояний. Процессы, благодаря которым в термодинамической системе устанавливается состояния равновесия, называют кинетическими процессами. Если термодинамическая система окружена адиабатической оболочкой, её переход в равновесное состояние – кинетический процесс. Этот переход сопровождается увеличением энтропии и является необратимым. Если в газе существует пространственная неоднородность плотности, температуры или скорости упорядоченного перемещения отдельных слоев газа, то происходит самопроизвольное выравнивание этих неоднородностей. В газе возникает поток молекул из области высокой концентрации в область низкой концентрации, или поток тепла из области высокой температуры в область низких температур. Переход термодинамической системы в равновесное состояние всегда сопровождается возникновением потоков физической величины, которая является неоднородной, то есть неодинаковой в разных частях системы.

В газе возникают потоки энергии, вещества, а также импульса упорядоченного движения частиц. Эти потоки, характерные для неравновесных состояний газа, являются основой кинетических явлений, объединенных общим названием – явления переноса. К явлениям переноса относятся диффузия, внутреннее трение и теплопроводность.

Для количественного описания процессов переноса физических величин из одной области термодинамической системы в другую вводится понятие потока физической величины.

Поток некоторой физической величины равен количеству этой величины, переносимому через заданную поверхность в единицу времени. Обратим внимание, что форма поверхности может быть любой. Поток физической величины – величина скалярная. Знак потока (положительный или отрицательный) определяется направлением переноса физической величины. Например, поток через площадку $\Delta S$ в направлении оси $x$ будем считать положительным, а в противоположном направлении – отрицательным.




Возникновение потоков связано с неоднородностью физической величины в пространстве. Для количественного описания неоднородности используется понятие **градиента физической величины.**

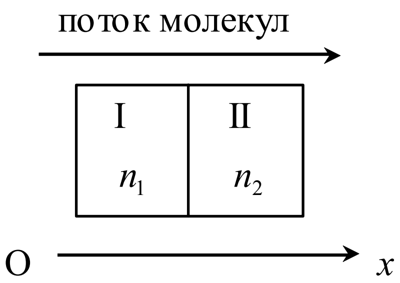
Пусть переносится некоторая физическая величина $U$. Если величина $U = f(x,y,z)$, то градиент функции $U$ равен: $\overrightarrow{grad}U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$. Градиент функции $U$ – это вектор, направленный по нормали к поверхности уровня $U = const$ в сторону возрастания $U$. Модуль вектора градиента численно равен производной функции по $x$, $y$, $z$ и показывает, как величина $U$ меняется при переходе от одной точки пространства к другой.

Если величина $U = f(x)$, то градиент функции $U$ равен: $\overrightarrow{grad}U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i}$.

Градиент функции $U$ – это вектор, направленный по оси $x$.

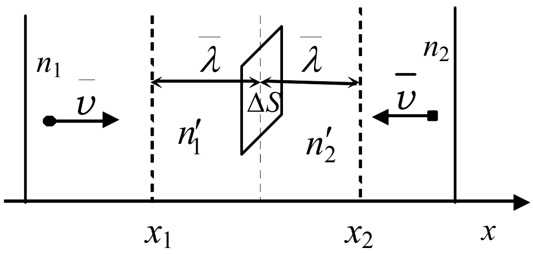
## 23.2. Уравнение диффузии

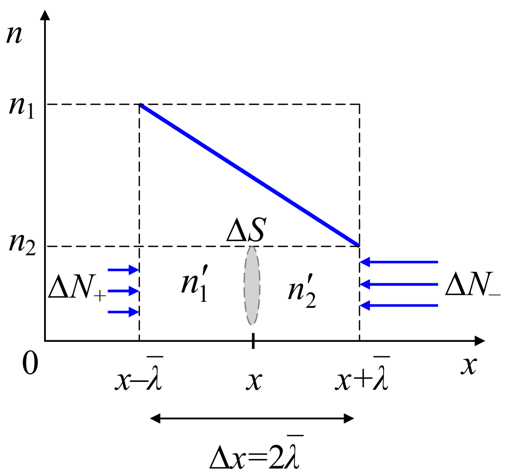
**Диффузией** называется явление самопроизвольного взаимного проникновения и перемешивания частиц двух соприкасающихся газов. Для смеси газов явление диффузии вызывается различием концентрации отдельных газов в разных частях сосуда. При постоянной температуре явление диффузии заключается в переносе массы газа из мест с большей концентрацией в места, где концентрация меньше.




Возьмём сосуд, разделённый на две части перегородкой. В одной части сосуда находится газ с концентрацией молекул $n_1$, а в другой газ – с концентрацией молекул $n_2$. Пусть $n_1 > n_2$. Уберём перегородку. Молекулы газа немедленно начнут переходить из одной части сосуда в другую, причём из первой части во вторую будет переходить больше молекул, чем обратно. Произойдёт выравнивание концентраций молекул по всему объёму, или другими словами, выравнивание плотности газа во всём сосуде. Это явление называется диффузией. <u>Переносимой величиной является масса газа</u>. Рассмотрим процесс переноса вещества.

1. Рассмотрим площадку $\Delta S$ в сосуде с газом, плотность которого неравномерная. Из-за теплового движения молекулы будут переходить через площадку $\Delta S$ как слева направо, так и справа налево. Будем считать, что температура газа постоянная. Средняя скорость теплового движения молекул $\bar{\upsilon}$. Ввиду существующей разности концентраций по обе стороны площадки, число частиц пересекающих площадку в единицу времени в противоположных направлениях будет разным. Вследствие этого возникнет диффузионный поток вдоль оси $OX$. Число частиц, проходящих через площадку слева направо, обозначим $\Delta N_+$, а число частиц, проходящих через площадку справа налево, обозначим $\Delta N_-$, тогда




$\Delta S$ – площадка.

$\Delta N_+ = \dfrac{1}{6} n_1' \bar{\upsilon} \Delta S \Delta t$ – число молекул, прошедших через площадку $\Delta S$ за время $\Delta t$ в положительном направлении.

$$\Delta N_- = \frac{1}{6} n_2' \bar{\upsilon} \Delta S \Delta t$$

$$\Delta N = \Delta N_+ - \Delta N_- = \frac{1}{6}(n_1' - n_2')\bar{\upsilon}\Delta S \Delta t$$

$$\Delta N = \frac{1}{6}\left(\underbrace{n_1' - n_2'}_{-\Delta n'}\right)\bar{\upsilon}\frac{2\bar{\lambda}}{2\bar{\lambda}}\Delta S \Delta t \qquad n_2' > n_1'.$$

$n_1'$ и $n_2'$ – концентрации молекул между точками, отделенными друг от друга расстоянием $\Delta x = 2\bar{\lambda}$. Разность концентраций $\Delta n' = n_2' - n_1'$ можно легко найти, если известен градиент концентрации молекул в сосуде $\frac{dn}{dx}$ или график изменения концентрации по оси $OX$ (как на рисунке).

На расстоянии $\Delta x = 2\bar{\lambda}$ концентрация меняется на $\Delta n' = n_2' - n_1'$: $\frac{\Delta n'}{2\bar{\lambda}} = \frac{dn}{dx}$.

Найдем массу, которую переносят молекулы:

$$\Delta M = m_0 \Delta N = \frac{1}{6}m_0\left(\underbrace{n_1' - n_2'}_{-\Delta n'}\right)\bar{\upsilon}\frac{2\bar{\lambda}}{2\bar{\lambda}}\Delta S \Delta t = -\frac{1}{6}\frac{d(m_0 n)}{dx}\bar{\upsilon}2\bar{\lambda}\Delta S \Delta t = -\frac{1}{3}\bar{\upsilon}\bar{\lambda}\frac{d\rho}{dx}\Delta S \Delta t$$

– это уравнение называется уравнением диффузии (закон Фика).

Коэффициент диффузии $D = \frac{1}{3}\bar{\upsilon}\bar{\lambda}$ зависит от средней скорости теплового движения молекул. Тогда уравнение диффузии можно записать $\Delta M = -D\frac{d\rho}{dx}\Delta S \Delta t$.

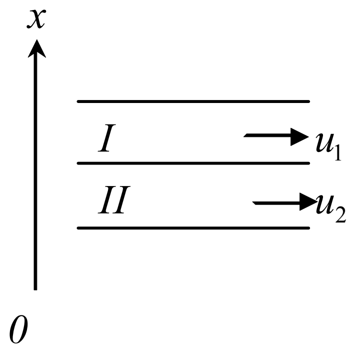
Средняя длина свободного пробега $\bar{\lambda}$ молекул газа обратно пропорциональна давлению $P$ газа; следовательно, коэффициент диффузии $D$ тоже обратно пропорционален давлению $P$ газа: $D \sim \frac{1}{P}$. При малых давлениях диффузия происходит быстрее.

Скорость $\bar{\upsilon}$ молекул газа пропорциональна $\sqrt{\frac{T}{\mu}}$, где $T$ – температура газа, $\mu$ – масса моля газа. Следовательно, $D \sim \sqrt{T}$ и $D \sim \frac{1}{\sqrt{\mu}}$, т.е. при нагревании газа коэффициент диффузии увеличивается и для разных газов коэффициент диффузии тоже разный.

### 23.3. Уравнение внутреннего трения (вязкости)

Вязкость газов (это явление относится и к жидкостям) – это свойство, благодаря которому выравниваются скорости движения различных слоев газа. Выравнивание скоростей соседних слоев, если эти скорости различны, происходит благодаря тому, что из слоя газа с большой скоростью движения переносится импульс к слою, движущемуся с меньшей скоростью.

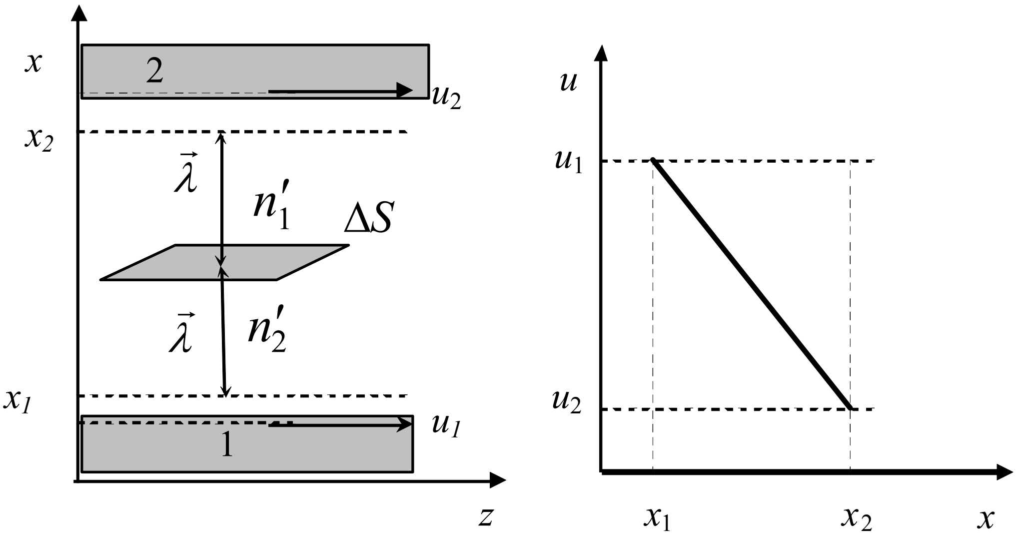
Если разность скоростей движения различных слоев газа поддерживается внешними силами постоянной, то и поток импульса будет постоянным, причем этот поток будет направлен вдоль падения скорости.




Имеем два слоя газа, движущихся с различными скоростями. $u_1$ и $u_2$ – скорости направленного движения слоёв газа. Но молекулы газа участвуют не только в направленном движении, они участвуют также в беспорядочном, хаотическом, т.е. в тепловом движении. Пусть $u_1 > u_2$. В результате теплового движения молекулы из слоя *I* попадают в слой *II*, и каждая молекула приносит с собой в слой *II* импульс $m_0 u_1$, где $m_0$– масса молекулы.

В результате в слое *II* становится больше быстрых молекул и слой *II* начинает двигаться быстрее. И наоборот, молекулы, попадающие из слоя *II* в слой *I* и приносящие с собой импульс $m_0 u_2$, замедляют движение слоя *I*, так как в нём становится больше медленных молекул. Скорости слоёв выравниваются друг относительно друга. Это явление вязкости. <u>Переносимой величиной является импульс</u>.

Выделим мысленно в газе площадку $\Delta S$, параллельную слоям, текущим с различными скоростями. Пусть слой 1 лежит под площадкой $\Delta S$ на расстоянии $\bar{\lambda}$, а слой 2 на таком же расстоянии $\bar{\lambda}$ над площадкой $\Delta S$.




Так как $\overline{\lambda}$ – средняя длина свободного пробега молекул газа, то молекулы, летящие из слоев 1и 2 по направлению к площадке $\Delta S$, будут достигать ее без столкновений друг с другом.

Из-за теплового движения молекулы будут переходить через площадку $\Delta S$ как сверху вниз, так и снизу вверх. Будем считать, что температура газа и концентрация молекул в единице объёма постоянная. Средняя скорость теплового движения молекул $\overline{\upsilon}$. Ввиду существующей разности скоростей потоков по обе стороны площадки, импульс переносимый частицами пересекающих площадку в единицу времени в противоположных направлениях будет разным. Вследствие этого возникнет диффузионный поток вдоль оси *OX.* Число частиц, проходящих через площадку снизу вверх, обозначим $\Delta N_+$, а число частиц, проходящих через площадку сверху вниз, обозначим $\Delta N_-$, тогда:

$\Delta N_+ = \frac{1}{6} n_1' \overline{\upsilon} \Delta S \Delta t$ – поток частиц, движущийся снизу вверх, $\Delta N_- = \frac{1}{6} n_2' \overline{\upsilon} \Delta S \Delta t$ – поток частиц, движущихся сверху вниз, где $n_1'$ и $n_2'$ – концентрации молекул между точками, отделенными друг от друга расстоянием $\Delta x = 2\overline{\lambda}$, но $n_1' = n_2' = n'$.

Импульс, перенесённый сверху вниз равен:

$$\Delta P_- = m_0 u_2 \Delta N_+ = \frac{1}{6} n' \overline{\upsilon} \Delta S \Delta t m_0 u_2,$$

а импульс, перенесённый снизу вверх равен:

$$\Delta P_+ = m_0 u_2 \Delta N_+ = \frac{1}{6} n' \bar{\upsilon} \Delta S \Delta t m_0 u_1 .$$

Суммарный импульс, перенесенный через площадку $\Delta S$ за время $\Delta t$ равен $\Delta P = \frac{1}{6} n' \bar{\upsilon} \Delta S \Delta t m_0 (u_1 - u_2) = -\frac{1}{6} m_0 n' \bar{\upsilon} (u_2 - u_1) \frac{2\bar{\lambda}}{2\bar{\lambda}} \Delta S \Delta t$. Так как разность скоростей потоков $\Delta u = u_2 - u_1$ можно легко найти, если известен градиент скорости потоков в сосуде $\frac{du}{dx}$ или график изменения скорости потоков по оси $OX$ (как на рисунке), то на расстоянии $\Delta x = 2\bar{\lambda}$ скорость меняется на $\Delta u = u_2 - u_1$: $\frac{\Delta u}{2\bar{\lambda}} = \frac{du}{dx}$.

Тогда уравнение внутреннего трения имеет вид: $\Delta P = -\frac{1}{6} m_0 n' \bar{\upsilon} (u_2 - u_1) \frac{2\bar{\lambda}}{2\bar{\lambda}} \Delta S \Delta t = -\frac{1}{3} \rho \bar{\upsilon} \bar{\lambda} \frac{du}{dx} \Delta S \Delta t$. Коэффициент внутреннего трения (коэффициент вязкости) равен $\eta = \frac{1}{3} \bar{\upsilon} \bar{\lambda} \rho$.

Коэффициент внутреннего трения (или коэффициент вязкости) зависит от средней скорости $\bar{\upsilon}$ теплового движения молекул, от средней длины свободного пробега $\bar{\lambda}$ молекул газа и от плотности $\rho$ газа.

Теперь можно сделать некоторые выводы:

1) $\bar{\upsilon} \sim \sqrt{T}$, следовательно, коэффициент $\eta$ тоже прямо пропорционален $\sqrt{T}$, т.е. с увеличением температуры вязкость газа возрастает.

2) Коэффициент $\eta$ прямо пропорционален $\bar{\lambda}$ и $\rho$. Но средняя длина свободного пробега $\bar{\lambda}$ обратно пропорциональна давлению $P$ газа, а плотность $\rho$ прямо пропорциональна давлению $P$ газа. Следовательно, произведение $\bar{\lambda}\rho$ не зависит от давления газа; значит внутреннее трение (или вязкость) газа не зависит от давления газа. Этот вывод кажется странным, но опытные данные подтвердили этот факт.

3) Найдем силу $F$ внутреннего трения.

Сила внутреннего трения $F$ – это сила, с которой один слой газа действует на другой. Сила внутреннего трения $F$ действует по касательной к слою.

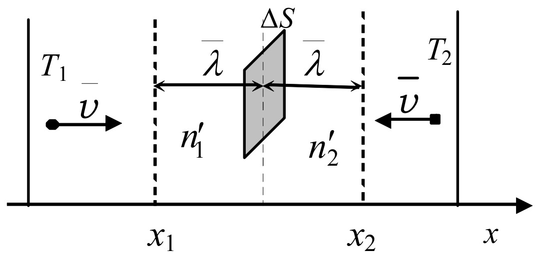
Согласно второму закону Ньютона:

$$\Delta P = F \Delta t \qquad \text{или} \qquad -\eta \frac{\Delta u}{\Delta x} \Delta S \Delta t = F \Delta t .$$

Итак, сила внутреннего трения равна: $F=-\eta\dfrac{\Delta u}{\Delta x}\Delta S$ – закон Ньютона.

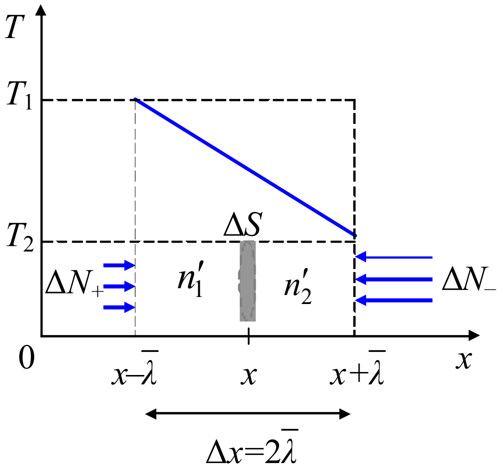
### 23.4. Уравнение теплопроводности

Если газ неравномерно нагрет, то температуры в различных частях газа различны и, если газ предоставить самому себе, то температуры обязательно выравниваются. Процесс выравнивания температур называется теплопроводностью. Очевидно, что это связано с потоком тепла от более нагретой части газа к более холодной. Это явление возникновения потока тепла в газе называется теплопроводностью. Выравнивание температуры происходит потому, что выравниваются энергии теплового движения молекул. Переносимой величиной в этом явлении является энергия. Энергия переносится в форме теплоты.




Пусть температура газа $T$ меняется в направлении оси $OX$, $T_1 > T_2$. Из-за теплового движения молекулы будут переходить через площадку $\Delta S$ как слева направо , так и справа налево. Будем считать, что концентрация молекул в единице объёма постоянная. Средняя скорость теплового движения молекул $\bar{\upsilon}$. Ввиду существующей разности температур возникнет поток молекул. Энергия, переносимая частицами пересекающими площадку в единицу времени в противоположных направлениях будет разная. Вследствие этого возникнет диффузионный поток вдоль оси $OX$. Число частиц, проходящих через площадку слева направо, обозначим $\Delta N_+$, а число частиц, проходящих через площадку справа налево, обозначим $\Delta N_-$, тогда:

$\Delta N_+ = \dfrac{1}{6} n_1' \bar{\upsilon}\Delta S\Delta t$ – поток частиц, движущийся справа налево, $\Delta N_- = \dfrac{1}{6} n_2' \bar{\upsilon}\Delta S\Delta t$ – поток частиц, движущихся слева направо, где $n_1'$ и $n_2'$ – концентрации молекул между точками, отделенными друг от друга расстоянием $\Delta x = 2\bar{\lambda}$, но $n_1' = n_2' = n'$.




Средняя кинетическая энергия одной частицы определяется формулой: $\overline{E}_к = \frac{i}{2}kT$, тогда энергия, переносимая частицами слева направо: $\overline{E}_{к1}\Delta N_+ = \frac{1}{6}\frac{i}{2}n'\bar{\upsilon}kT_1\Delta S\Delta t$, а энергия. переносимая частицами справа налево: $\overline{E}_{к2}\Delta N_- = \frac{1}{6}\frac{i}{2}n'\bar{\upsilon}kT_2\Delta S\Delta t$.

Суммарная энергия, переносимая частицами слева направо равна: $\Delta Q = \frac{1}{6}\frac{i}{2}n'\bar{\upsilon}k\Delta S\Delta t(T_1 - T_2) = -\frac{1}{6}\frac{i}{2}n'\bar{\upsilon}k(T_2 - T_1)\Delta S\Delta t$.

Так как разность температур потоков $\Delta T = T_2 - T_1$ можно легко найти, если известен градиент температуры потоков в сосуде $\frac{dT}{dx}$ или график изменения скорости потоков по оси $OX$ (как на рисунке), то на расстоянии $\Delta x = 2\bar{\lambda}$ скорость меняется на $\Delta T = T_2 - T_1$: $\frac{\Delta T}{2\bar{\lambda}} = \frac{dT}{dx}$. Учтем, что $\frac{i}{2}k = \frac{C_V}{N_A} = \frac{c_V\mu}{N_A} = c_V m_0$, где $c_V$ – удельная теплоемкость.

Количество теплоты $\Delta Q$, перенесённое через площадку $\Delta S$ за время $\Delta t$ равно:

$$\Delta Q = -\frac{1}{6}\frac{i}{2}n'\bar{\upsilon}k(T_2 - T_1)\Delta S\Delta t = -\frac{1}{6}c_V m_0 n'\bar{\upsilon}2\bar{\lambda}\frac{dT}{dx}\Delta S\Delta t = -\frac{1}{3}c_V\rho\bar{\upsilon}\bar{\lambda}\frac{dT}{dx}\Delta S\Delta t.$$

Закон $\Delta Q = -\chi\frac{dT}{dx}\Delta S\Delta t$ – носит название закона Фурье.

Коэффициент теплопроводности $\chi = \frac{1}{3}\rho\bar{\lambda}c_V\bar{\upsilon}$.

Перечисленные три явления переноса имеют много общего:

1. причина всех трёх явлений одинакова, а именно хаотическое движение молекул газа;

2. механизм всех трёх явлений одинаков и заключается в переносе той или иной величины;

3. все три процесса необратимы. Например, в результате теплового движения молекул не может восстановиться неравенство температур различных частей газа.

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В чем сущность явлений переноса? Чем характеризуются явления переноса?

2. Каков механизм явлений переноса?

3. Какие явления переноса в газах Вы знаете? Расскажите кратко об этих явлениях.

4. Что общего во всех явлениях переноса?

## ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ФОРМУЛЫ ПО РАЗДЕЛУ «МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА»

Молекулярная физика и термодинамика – разделы физики, изучающие макроскопические процессы в телах, связанные с огромным числом содержащихся в них атомов и молекул.

*Термодинамическая система* – совокупность макроскопических тел, которые обмениваются энергией, как между собой, так и с внешними телами (внешней средой).

### Молекулярная физика

**<u>Идеальным газом</u> называется газ, для которого выполнены следующие условия:**

1. Молекулы газа находятся друг от друга на расстояниях настолько больших, что можно пренебречь линейными размерами молекул, по сравнению с этими расстояниями, то есть мы пренебрегаем собственным объёмом молекул.
2. Между молекулами нет сил взаимодействия. Силы взаимодействия появляются только в момент столкновения, причём столкновения являются абсолютно упругими.

**Изопроцесс – процесс, при котором один из макропараметров состояния данной массы газа остается постоянным.**

**Законы, которые устанавливают взаимосвязь параметров при разных состояниях газа, называются газовыми законами.**

1. **Закон Бойля – Мариотта:** $PV = const$, при $m = const,\ \ T = const.$
2. **Закон Гей–Люссака:** $\dfrac{V}{T} = const$ при $P=const.$
3. **Закон Шарля:** $\dfrac{P}{T} = const$ при $V=const.$
4. **Закон Авогадро** – 1 *моль* любого газа при нормальных условиях занимает объём $V_0 = 22{,}4$ *л.*
5. **Закон Дальтона:** $P = \sum P_i$ – давление смеси идеальных газов равно сумме парциальных давлений входящих в неё газов.

*Парциальное давление* – давление, которое бы производил газ, входящий в состав газовой смеси, если бы он один занимал весь объём, в котором находится смесь.

6. **Закон Клапейрона:** $\dfrac{PV}{T} = const$, при $m=const.$

**7. Уравнение Клапейрона–Менделеева** – уравнение состояния для газа массы $m$:

$$pV = \frac{m}{\mu}RT = \nu RT$$

Основные положения молекулярно-кинетической теории:

1. Все тела состоят из атомов или молекул.
2. Между атомами и молекулами идеального газа нет сил взаимодействия.
3. Атомы и молекулы находятся в вечном хаотическом движении. Это непрерывное хаотическое движение называется тепловым движением атомов и молекул. Интенсивность этого движения определяет температуру газа.

$P = \frac{1}{3}n_0 m_0 \langle \upsilon_{кв} \rangle^2$ – это выражение называется основным **уравнением молекулярно-кинетической теории газов**

**Молекулярно-кинетический смысл абсолютной температуры *T* состоит в том, что она служит мерой средней кинетической энергии поступательного движения молекул:** $\overline{E}_к = \frac{3}{2}kT$.

Длина свободного пробега – это расстояние, которое проходит молекула от одного столкновения до другого: $\overline{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 n_0}$.

Функция распределения Максвелла молекул по проекции скорости на ось $x$: $\varphi(\upsilon_x) = ce^{-\lambda\upsilon_x^2}$ или $\varphi(\upsilon_x) = (\frac{m_0}{2\pi kT})^{1/2} e^{-\frac{m_0\upsilon_x^2}{2kT}}$. Относительное число молекул, проекции скорости, которых лежат в интервале от $\upsilon_x$ до $\upsilon_x + \Delta\upsilon_x$ (вероятность того, что проекции скорости молекул лежат в интервале от $\upsilon_x$ до $\upsilon_x + \Delta\upsilon_x$) можно определить по формуле: $\frac{\Delta n_x}{n} = \varphi(\upsilon_x)\Delta\upsilon_x$. А число молекул в единице объёма газа, проекции скоростей которых лежат в интервале от $\upsilon_x$ до $\upsilon_x + \Delta\upsilon_x$, равна: $\Delta n_x = (\frac{m_0}{2\pi kT})^{1/2} n e^{-\frac{m_0 \upsilon_x^2}{2kT}} \Delta\upsilon_x$.

Число $\Delta n$ молекул в единицу объема в газе, составляющие скоростей, которых одновременно лежат в интервале от $\upsilon_x$ до $\upsilon_x + \Delta\upsilon_x$; от $\upsilon_y$ до $\upsilon_y + \Delta\upsilon_y$; от $\upsilon_z$ до $\upsilon_z + \Delta\upsilon_z$ определяется формулой:

$$\Delta n = (\frac{m_0}{2\pi kT})^{3/2} n e^{-\frac{m_0(\upsilon_x^2+\upsilon_y^2+\upsilon_z^2)}{2kT}} \Delta\upsilon_x \Delta\upsilon_y \Delta\upsilon_z .$$

$F(\upsilon) = 4\pi(\frac{m_0}{2\pi kT})^{3/2} e^{-\frac{m_0(\upsilon_x^2+\upsilon_y^2+\upsilon_z^2)}{2kT}} \upsilon^2$ – функция распределения молекул по модулю скорости. А число молекул, модуль скорости которых заключен в интервале $\upsilon$ и $\upsilon + \Delta\upsilon$ равно: $\Delta n = 4\pi(\frac{m_0}{2\pi kT})^{3/2} n \; e^{-\frac{m_0\upsilon^2}{2kT}} \upsilon^2 \Delta\upsilon.$

Скорость, при которой функция $F(\upsilon)$ имеет максимум, называется **наиболее вероятной** $\upsilon_в$ **(наивероятной):** $\upsilon_в = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$.

**Средняя скорость молекул газа (средняя арифметическая скорость) –** называется вычисленное с помощью функции $F(\upsilon)$ среднее значение модуля скорости: $\langle\upsilon\rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$.

**Среднее квадратичное значение скорости молекул идеального газа:** $\langle\upsilon_{кв}\rangle = \sqrt{\langle\upsilon_{кв}^2\rangle} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$.

<u>Барометрическая формула</u> показывает, как зависит атмосферное давление $P$ от высоты $h$ над поверхностью Земли: $P = P_0 e^{-\frac{\mu gh}{RT}}$.

Распределением Больцмана для молекул в поле силы тяжести: $n = n_0 e^{-\frac{\mu gh}{RT}}$.

Внутренняя энергия $U$ **идеального газа** – это сумма кинетических энергий всех его молекул: $U = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2}RT$.

## Термодинамика

Элементарной работой газа называется величина $\delta A = PdV$.

Работа в равновесном процессе перехода системы из состояния с объёмом $V_1$ в состояние с объёмом $V_2$ равна: $A = \int\limits_{V_1}^{V_2} PdV$.

*Теплообменом* называется процесс передачи внутренней энергии от одного тела к другому, не сопровождаемый совершением макроскопической работы.

*Количеством теплоты $Q$* называется внутренняя энергия, полученная термодинамической системой путем теплообмена, то есть без совершения над системой макроскопической работы.

$Q = \Delta U + A$ – интегральная форма записи первого начала термодинамики.

$\delta Q = \Delta U + \delta A = dU + PdV$ – дифференциальная форма записи первого начала термодинамики.

Теплоемкостью тела называется физическая величина, численно равная количеству теплоты, которое необходимо сообщить телу, чтобы изменить его температуру на один градус: $C_{тела} = \dfrac{\partial Q}{dT}$.

Удельная теплоёмкость $c$ – это физическая величина, равная количеству теплоты, которое необходимо сообщить единице массы этого вещества, чтобы нагреть его на один градус: $C_{уд} = c = \dfrac{\partial Q}{mdT}$.

Молярная теплопроводность $C$ – это физическая величина, равная количеству теплоты, которое необходимо сообщить одному молю вещества, чтобы нагреть его на один градус: $C_{мол} = C = \dfrac{\partial Q}{\frac{m}{\mu} dT}$.

$C_p = C_V + R$ – уравнение Майера для идеального газа.

**Адиабатным (адиабатическим) процессом** называется процесс, идущий без теплообмена с окружающей средой. $dQ = 0$ – уравнение процесса.

$TV^{\gamma - 1} = const$ – уравнение адиабатного процесса.

**Модель простейшей тепловой машины: нагреватель (горячее тело), холодильник (холодное тело), рабочее тело (газ).**

**Коэффициент полезного действия**, сокращенно, КПД тепловой машины $\eta$ – это отношение работы к количеству теплоты, полученной от нагревателя.

$$\eta = \frac{A}{Q_1} \qquad \text{или} \qquad \eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}.$$

$\eta = \dfrac{T_1 - T_2}{T_1}$ – коэффициент полезного действия машины, работающей по циклу Карно.

Эффективность машины можно оценить по способности повышения температуры тела с более высокой температурой $T_1$. В таком случае машина действует как **нагреватель (тепловой насос)**. Её эффективность характеризуется коэффициентом, который определяется отношением количества теплоты, переданного на нагревание, к затраченной на это работе внешних сил: $\xi_1 = \dfrac{|Q_1|}{|A_{внеш}|} = \dfrac{T_1}{T_1 - T_2} = \dfrac{1}{1 - (T_2/T_1)} = \dfrac{1}{\eta}$.

Эффективность машины можно оценить по способности понижения температуры тела с более низкой температурой $T_2$. В таком случае машина действует как **холодильная машина**. Её эффективность характеризуется коэффициентом, который определяется отношением количества теплоты отнятого у холодного тела к затраченной на это работе внешних сил: $\xi_2 = \dfrac{|Q_2|}{|A_{внеш}|} = \dfrac{T_2}{T_1 - T_2} = \dfrac{1}{\eta} - 1$.

Второе начало термодинамики:

формулировка Клаузиуса: *теплота не может самопроизвольно переходить от тела, менее нагретого к телу более нагретому;*

формулировка Томсона: *невозможен круговой процесс, единственным результатом которого было бы совершение работы за счёт охлаждения теплого резервуара (уменьшения его внутренней энергии).*

**Приведённой теплотой называется величина** $\dfrac{Q}{T}$, где $Q$ – теплота, полученная термодинамической системой от резервуара с температурой $T$.

Если машина совершает произвольный круговой цикл, то сумма приведенной теплоты нагревателя и приведенной теплоты холодильника меньше нуля: $\dfrac{Q_1}{T_1} + \dfrac{Q_2}{T_2} < 0$ (неравенство Клаузиуса).

**Приведённая теплота произвольного неравновесного и необратимого кругового процесса меньше или равна нулю:** $\oint \frac{\delta Q}{T} \le 0$ – неравенство Клаузиуса в общем виде.

Энтропия $S$ – *это функция состояния термодинамической системы, приращение которой равно приведенной теплоте обратимого перехода системы из произвольного начального состояния 1 в произвольное конечное состояние 2*: $S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}$ или в дифференциальной форме $dS = \frac{\delta Q}{T}$.

Приращение энтропии термодинамической системы в произвольном (обратимом или необратимом) процессе всегда больше или равно приведенной теплоте этого процесса: $S_2 - S_1 \ge \int\limits_{необр} \frac{\delta Q}{T}$ и $dS \ge \frac{dQ}{T}$.

**Закон возрастания энтропии:** *в любом процессе, который осуществляется в адиабатически изолированной системе, энтропия либо возрастает, либо остаётся постоянной:* $S_2 - S_1 \ge 0$ и $dS \ge 0$.

**Микросостояние –** это состояние, в котором заданы параметры всех частиц системы. Параметры частиц, определяющие их микросостояния: пространственные координаты, скорость, энергия, импульс и т.д.

**Макросостоянием термодинамической системы** называется такое состояние системы, в котором заданы значения её макроскопических параметров: давления, объёма, температуры, внутренней энергии, энтропии и т.д.

Согласно Больцману энтропия $S$ прямо пропорциональна логарифму термодинамической вероятности $W$: $S = k\ln W + const$.

$\left(p + \frac{a}{V_0^2}\right)(V_0 - b) = RT -$ уравнение Ван-дер-Ваальса для одного моля реального газа.

Внутренняя энергия реального газа определяется формулой $U = C_V T - \frac{a}{V}$.

Уравнение диффузии: $\Delta M = -D\frac{d\rho}{dx}\Delta S\Delta t$, коэффициент диффузии $D = \frac{1}{3}\overline{\upsilon}\overline{\lambda}$.

Уравнение внутреннего трения имеет вид: $\Delta P = -\frac{1}{3}\rho\overline{\upsilon}\overline{\lambda}\frac{du}{dx}\Delta S\Delta t$. Коэффициент внутреннего трения (коэффициент вязкости) равен $\eta = \frac{1}{3}\overline{\upsilon}\overline{\lambda}\rho$.

Уравнение теплопроводности $\Delta Q = -\chi\frac{dT}{dx}\Delta S\Delta t$ - носит название закона Фурье. Коэффициент теплопроводности $\chi = \frac{1}{3}\rho\overline{\lambda}c_V\overline{\upsilon}$.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

КРАВЧЕНКО Надежда Степановна
ТВЕРДОХЛЕБОВ Сергей Иванович

# ФИЗИКА

## МЕХАНИКА. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА. ТЕРМОДИНАМИКА

Учебное пособие

Редактор
Верстка Н.С. Кравченко
Дизайн обложки

Подписано к печати __.__.2010. Формат 60x84/16. Бумага «Снегурочка».
Печать XEROX. Усл.печ.л. 9.59. Уч.-изд.л. 8.68.
Заказ . Тираж ____ экз.

Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту ISO 9001:2000

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru